# ∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 2000 ∽

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Une usine fabrique des moteurs électriques pour l'industrie spatiale. Ceux-ci doivent être très fiables et performants ; pour cela ils passent des contrôles très sévères.

Chaque moteur est testé en fin de fabrication. Si le test est positif, le moteur est acheminé chez le client ; si le test est négatif, le moteur retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si, cette fois, le test est positif, le moteur part chez le client mais, si le test est négatif, le moteur est définitivement écarté et détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85 % des moteurs neufs sortis directement des chaines de fabrication mais que, parmi les moteurs révisés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

*Sauf avis contraire, on donnera les valeurs décimales exactes des probabilités demandées.*

1. On choisit un moteur au hasard dans la chaine de fabrication.
   a. Construire un arbre de probabilité illustrant les différents cas qui peuvent se présenter pour ce moteur.
      Faire apparaître sur chaque branche les probabilités correspondantes.
   b. Donner la probabilité pour que le premier test en fin de fabrication soit positif pour ce moteur.
   c. Calculer la probabilité pour que ce moteur doive être révisé et soit ensuite acheminé chez le client.
   d. Calculer la probabilité pour que ce moteur soit finalement écarté et détruit.
   e. Calculer la probabilité pour que ce moteur soit envoyé chez le client.
2. La fabrication d'un moteur revient à 60 000 francs auxquels il faut rajouter 10 000 francs si le moteur est révisé. Un moteur est facturé au client la somme de $t$ francs ($t$ nombre réel positif).
   Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque moteur fabriqué, associe le gain (éventuellement négatif que réalise l'entreprise sur ce moteur.
   a. Déterminer en fonction de $t$ les trois valeurs que peut prendre $X$ et déterminer la loi de probabilité de $X$.
      (On rappelle que le bénéfice est la différence entre le prix de vente et le prix de revient.)
   b. Calculer en fonction de $t$ l'espérance mathématique de $X$ et en déduire la valeur de $t$ à partir de laquelle l'entreprise fera un bénéfice positif en vendant un grand nombre de moteurs (arrondir au franc près).

**EXERCICE 2** **5 points**

**Enseignement obligatoire**

M^me^ X décide d'ouvrir un plan d'épargne. Le taux **mensuel** de celui-ci est de 0,4 %, les intérêts sont capitalisés tous les mois. Elle verse 10 000 F le 1^er^ janvier 2000. Puis, tous les premiers de chaque mois à partir du 1^er^ février 2000, elle verse 600 F sur ce plan.

Soit $u_n$ la somme qui se trouve sur son plan après $n$ mois d'ouverture. Ainsi $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10640$.

1. Calculer $u_2$ et $u_3$.
   Écrire une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
2. On définit la suite $(v_n)$ telle que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on ait $v_n = u_n + 150000$.
   Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$.

3. Calculer le temps nécessaire pour économiser la somme de 100 000 F sur ce plan.
En quelle année cela se produira-t-il ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade. L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis. On se propose d'étudier ceux-ci.
*Devis de l'entreprise A :*
Le premier mètre équipé coûte 100 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 20 F de plus que le mètre précédent (100 F pour équiper une falaise de un mètre, 100 F + 120 F = 220 F pour équiper une falaise de deux mètres, 100 F + 120 F + 140 F = 360 F pour une falaise de trois mètres, etc.)
*Devis de l'entreprise B :*
Le premier mètre équipé coûte 50 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (50 F pour équiper une falaise de un mètre, 50 F + 52,50 F = 102,50 F pour équiper une falaise de deux mètres, 50 F + 52,50 F + 55,125 F = 157,625 F pour une falaise de trois mètres, etc.).
On appelle $u_n$ le prix du $n$-ième mètre équipé et $S_n$ le prix de l'équipement d'une falaise de $n$ mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle $v_n$ le prix du $n$-ième mètre équipé et $R_n$ le prix de l'équipement d'une falaise de $n$ mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer $u_n$ puis $S_n$ en fonction de $n$.
2. Exprimer $v_n$ puis $R_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix au franc près.
4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 120 000 F pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

**PROBLÈME** **10 points**

Une société est spécialisée dans l'exploitation de gravières (le gravier extrait est utilisé pour la construction d'autoroutes). Elle doit étudier le plan d'exploitation d'un nouveau site d'extraction. Voici les conditions d'exploitation définies par la direction :
« L'exploitation débutera le 1^er^ janvier 2001. La production journalière de gravier devra rapidement augmenter pour atteindre son maximum après un an et demi de travail, puis elle devra décroître lentement. »
On traduit en langage mathématique ces consignes afin de modéliser la production journalière et la production totale. On choisit habituellement pour modéliser la production journalière du site une fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \left(at^2 + bt + c\right)\text{e}^{-t}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels.
$f(t)$ représente la production journalière de gravier extrait (en milliers de tonnes), $t$ étant la durée écoulée depuis le début de l'ouverture du site ($t$ est en années, c'est un réel positif). On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$.
Les consignes peuvent se traduire ainsi :
- $(\mathcal{C})$ passe par le point O de coordonnées $(0~;~0)$.
- La tangente à $(\mathcal{C})$ en O a pour coefficient directeur 3.
- La courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1,5.

**1.** Montrer que sous ces contraintes $f$ est définie par

$$f(t) = \left(2t^2 + 3t\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

**2.** Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ et montrer que

$$f'(t) = (-2t + 3)(t + 1)\mathrm{e}^{-t}.$$

Étudier les variations de la fonction $f$ pour $t \geqslant 0$. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Préciser le signe de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

**3.** Calculer le maximum de $f$ sur $[0~;~+\infty[$. En donner la valeur arrondie à $10^{-3}$ près. Quelle est la production journalière maximum prévue sur ce site, et à quelle date sera-t-elle atteinte ?

**4.** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur une feuille de papier millimétré (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 5 cm sur l'axe des ordonnées).

**5.** Montrer qu'il existe une seule valeur $t_0$, comprise entre 3 et 4, telle que $f(t_0)$ soit égale à 1 (soit 1 000 tonnes par jour).

Donner à l'aide de la calculatrice une valeur de $t_0$ arrondie à $10^{-2}$ près.

**6.** Montrer que la fonction $F$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(t) = \left(-2t^2 - 7t - 7\right)\mathrm{e}^{-t}$$

est une primitive de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

**7.** Considérant que la gravière sera exploitée 200 jours par an, on admettra que la production totale prévue pendant la durée $t$ est donnée par la formule

$$P(t) = 200 \times \int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**a.** Transformer l'écriture de $P(t)$ en utilisant le résultat de la question 6 et étudier les variations de la fonction $P$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

**b.** On prévoit que l'exploitation de ce site doit être interrompue au bout de cinq ans. Calculer à 1 000 tonnes près par défaut la quantité de gravier qui aura été extraite, ainsi que la production moyenne annuelle sur cette période.