Baccalauréat ES Métropole septembre 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Sur une portion de 6 kilomètres de boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin.
Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.
On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1\,;\,5]$ par

$$f(t) = 8\mathrm{e}\frac{\ln t}{t} + 4 \quad \text{où e est égal à } \exp(1).$$

Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$.
Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1. **a.** Étudier les variations de f sur $[1\,;\,5]$ et dresser son tableau de variations.

   b. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11 h.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,5]$ par

$$g(t) = (\ln t)^2.$$

   a. Calculer $g'(t)$ et en déduire une primitive de f sur $[1\,;\,5]$.

   b. Déterminer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 kilomètres, entre 7 h et 11 h du matin.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Une personne qui dispose de 20 € souhaite miser sur « pair » ou « impair » avant le lancer d'un dé.
La mise est doublée si on gagne, sinon elle est perdue.
Au premier lancer, elle mise 10 € sur « impair », et on suppose que la probabilité d'obtenir « pair » est la même que celle d'obtenir « impair ».
En revanche, aux lancers suivants, elle mise toute la somme qui lui reste ou s'arrête s'il ne lui reste plus rien. Elle décide de jouer au maximum trois fois.

1. Dans cette question, on suppose que la personne mise chaque fois sur « impair » et qu'à chaque fois la probabilité d'obtenir « pair » est égale à celle d'obtenir « impair ».

   On note X la somme qui lui reste à la fin.

   a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

   b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par X ainsi que l'espérance de cette loi.

2. Pour cette question, on a constaté après une étude statistique qu'après un « impair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « impair » est de $0,4$, et qu'après un « pair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « pair » est de $0,45$.

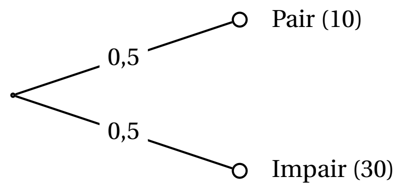
   Le sachant, la personne mise, à partir du deuxième lancer, sur la solution la plus probable.

   On note Y la somme qui lui reste à la fin.

   a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par Y ainsi que l'espérance de cette loi.

Remarque : *Dans les deux cas décrits par les deux questions, le premier niveau de l'arbre pondéré est donc le suivant où la somme qui reste à la personne est mise entre parenthèses :*



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 2.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire que :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2.$$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Illustration graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{2x + 6}{5}.$$

a. Tracer la représentation graphique D de f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b. Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0. En utilisant les droites D et Δ, construire les points P_1, P_2, P_3 de l'axe $\left(\text{O}, \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

À quoi correspond, sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites D et Δ ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie

Dans une commune les habitants paient un impôt en fonction de leurs revenus.
La population est alors classée du plus faible impôt au plus fort.

Le tableau suivant indique que $(100y)$ % de la recette fiscale due à cet impôt est payée par $(100x)$ % de la population.
Ainsi le couple (0,7 ; 0,25) signifie que 70 % de la population paie 25 % de la recette fiscale.

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,025	0,04	0,06	0,1	0,16	0,25	0,4	0,65	1

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$.
Vous prendrez un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
b. Un ajustement affine entre les variables statistiques x et y vous paraît-il approprié ?
2. *Dans cette question le détail des calculs n'est pas demandé.*
On considère la variable statistique $z = \ln(y)$ pour les valeurs de y strictement positives.
a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i sera arrondi à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$z_i = \ln y_i$	$-3,69$								

b. Donner une équation de la droite obtenue comme ajustement affine par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ où a et b seront arrondis à 0,1.
c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = \alpha\exp(ax)$ où α sera arrondi à 0,01.
d. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des valeurs arrondies à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\alpha\exp(ax_i)$									

Comparer avec le tableau initial et donner un bref commentaire.

Deuxième partie

Soient f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par

$$f(x) = 0,01\exp(4,6x) \quad \text{et} \quad g(x) = x - f(x).$$

On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère de la première partie.

1. **a.** En utilisant $f(x)$ comme ajustement de la variable statistique y de la première partie, déterminer à 1 % près le pourcentage de la population payant la moitié de la recette fiscale.
b. Étudier les variations de f sur [0 ; 1].
c. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) sur le graphique de la première partie.
2. **a.** Résoudre l'équation $f'(x) = 1$ sur [0 ; 1] ; la solution β sera arrondie à 0,01.
Tracer la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3.
b. Résoudre l'inéquation $f'(x) > 1$ sur [0 ; 1].
c. Donner une relation entre $g'(x)$ et $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur [0 ; 1].
d. Pour quelle valeur de x la fonction g atteint-elle son maximum ?
Interpréter graphiquement ce résultat.