∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 2003 ∾

Exercice 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4 - 8\ln x.$$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variation de f. En déduire le signe de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = x\ln x - x$$

   est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0~~+\infty[$.
   b. En déduire la primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$ vérifiant $F(1) = 0$.

Partie B

Le cours d'une action cotée en bourse, exprimé en dizaines d'euros, est égal à $f(x)$, où x représente le nombre de mois écoulés à partir du 1er décembre 2001. On a $x \in [1~;~12]$.

1. Un investisseur décide d'acheter 2 500 actions de ce type. En quel mois de l'année 2002 est-il le plus judicieux pour lui d'acheter ? Calculer sa dépense arrondie à l'euro.
2. **a.** Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1~;~11]$; on en donnera un arrondi à $0,1$.
   b. Quelle interprétation économique peut-on donner de ce résultat ?

Exercice 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout cet exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Une étude statistique effectuée sur un produit a donné les résultats suivants où
x désigne le prix unitaire en euros,
y désigne la demande en milliers d'unités
z désigne l'offre en milliers d'unités.

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5	7	8,5
y	8,4	5,3	3,9	3,1	2,8	2,1	1,7
z	0,75	1,25	1,75	2,25	2,5	3,5	4,25

1. **a.** Vérifier que la quantité offerte z est proportionnelle au prix unitaire x.
   b. On appelle g la fonction offre ainsi définie sur $[1~;~10]$ par $z = g(x)$.
   Représenter g dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$ (unité graphique 1 cm).
2. **a.** Représenter, dans le repère $\mathcal{R}$, le nuage de points associé à la série statistique $(x~;~y)$.
   b. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (aucun calcul n'est exigé sur la copie).
   Tracer D dans le repère $\mathcal{R}$.

   c. À l'aide de cet ajustement, calculer le prix unitaire d'équilibre (c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande). Vérifier graphiquement.

3. On se propose de determiner un autre type d'ajustement pour cette série.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

$X = \ln x$	0,41		1,25				
$Y = \ln y$	2,13						

   b. On admet qu'il est justifié de considérer un ajustement affine de Y en X.
   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de Y en X. .

   c. En déduire que l'on a $y = \mathrm{e}^{-0,92\ln x+2,51}$ et calculer le prix unitaire d'équilibre obtenu avec ce nouvel ajustement.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

Une entreprise fabrique deux produits E et F en quantités respectives x et y exprimées en tonnes, pour lesquelles le coût de production z est donné par

$$z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13.$$

où z est exprimé en milliers d'euros avec $x \in [0\,;7]$ et $y \in [0\,;\,7]$.

1. La surface représentant ce coût est donnée dans le repère de l'espace situé sur la feuille fournie en annexe qui sera rendue avec la copie.

   a. Placer sur cette surface le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 6.

   b. Donner graphiquement un encadrement d'amplitude 10 de la cote du point A.

   c. Vérifier par le calcul.

2. **a.** Montrer que l'on a $z = (x-3)^2 + 2(y-1)^2 + 2$.

   b. En déduire la production pour laquelle ce coût est minimal. Quel est ce coût en euros ?

   c. Placer le point B correspondant à cette production sur la surface.

3. L'entreprise doit fabriquer une quantité x du produit E et une quantité y du produit F avec la contrainte $x + y = 7$.

   a. Vérifier que z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $x \in [0;7]$ et
   $g(x) = 3x^2 - 30x + 83$.

   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum. Quel est alors le coût de production en euros ?

   c. Placer le point C correspondant à cette production sur la surface.

Problème **9 points**

Commun à tous les candidats

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes

- L est définie sur $[0\,;\,1]$;
- L est croissante sur $[0\,;\,1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- pour tout x de $[0\,;\,1]$, $L(x) \leqslant x$.

Partie A : les parties I et II sont indépendantes.

Le but de la **partie A** est de vérifier que les fonctions f et g considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

1. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,1]$.
2. Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
3. Conclure.

II.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)x - 1.$$

   a. Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$h(x) = -\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}-1)x + 1.$$

   a. Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de h (que l'on ne demande pas de calculer).

x	0		$\ln(\mathrm{e}-1)$		1
Signe de $h'(x)$		+	0	−	

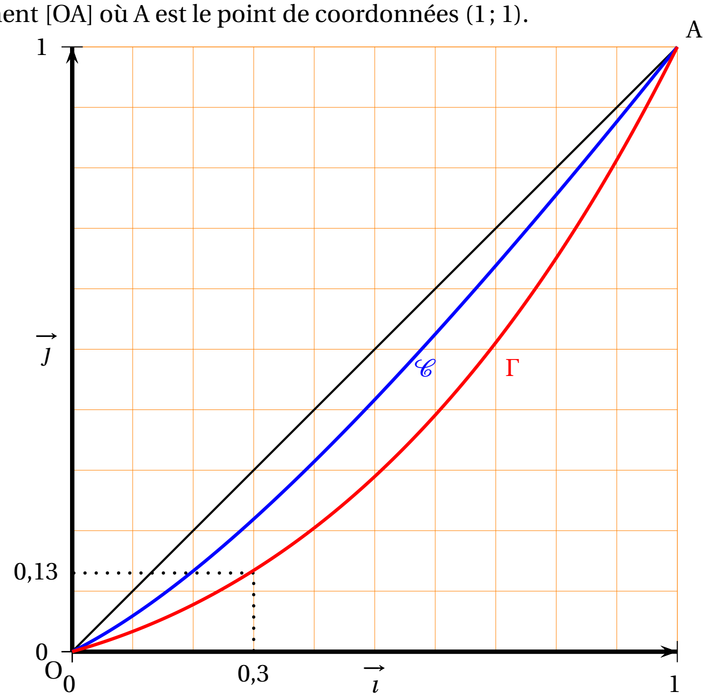
   Dresser le tableau de variations de h ; on précisera l'arrondi à 0,1 de $h[\ln(\mathrm{e}-1)]$.

   b. Vérifier que pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a : $h(x) = x - g(x)$.
   À l'aide de **II. 2. a.**, montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a : $g(x) \leqslant x$.

3. Conclure.

Partie B

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}$ et Γ des fonctions f et g et le segment [OA] où A est le point de coordonnées (1 ; 1).



1. On suppose que la courbe de Lorenz Γ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.

En abscisse, x représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.

En ordonnée, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.

Par exemple, comme l'arrondi de $g(0,3)$ à 10^{-2} est 0,13 on dit que 30 % des exploitations les plus petites représentent au total 13 % de la superficie des exploitations du pays G.

Donner la valeur arrondie à $0,01$ de $g(0,5)$. Interpréter ce résultat.

2. On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre $2\mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment [OA] et la courbe Γ. On le note γ_{G}.

a. Exprimer cette aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale. Déterminer la valeur exacte de cette aire.

b. Donner la valeur arrondie à 0,01 de γ_{G}.

3. La représentation graphique $\mathscr{C}$ de f est la courbe de Lorenz pour un pays F.

Calculer γ_{F} le coefficient de Gini pour le pays F.

En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.

4. Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.

a. Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?

b. Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

Annexe à rendre avec la copie
Enseignement de spécialité