

☞ Baccalauréat ES Métropole–La Réunion septembre 2004 ☞

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout x élément de \mathbb{R} par

$$f(x) = 30e^{-5x}.$$

Soit g la fonction définie pour tout x élément de \mathbb{R} par

$$g(x) = e^{5x} + 1.$$

On admet que f et g sont dérivables sur \mathbb{R} .

1. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R} .
3. Tracer sur la copie dans un même repère orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g sur l'intervalle $[0; 0,5]$ (on prendra 20 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées).
4. Le but de cette question est de résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$(E) \quad : \quad f(x) = g(x).$$

- a. Montrer que (E) s'écrit aussi : $(e^{5x})^2 + e^{5x} - 30 = 0$.
 - b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $X^2 + X - 30 = 0$.
 - c. En déduire que $\frac{\ln 5}{5}$ est l'unique solution de l'équation (E).
5. Dans cette question, on considère la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses. Hachurer sur le graphique de la **question 3.** le domaine situé à la fois sous la courbe de f et sous la courbe de g , et limité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = 0,5$.
Calculer, en cm^2 , l'aire \mathcal{A} de ce domaine. Donner la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} puis une valeur approchée à 10^{-1} près.

EXERCICE 2

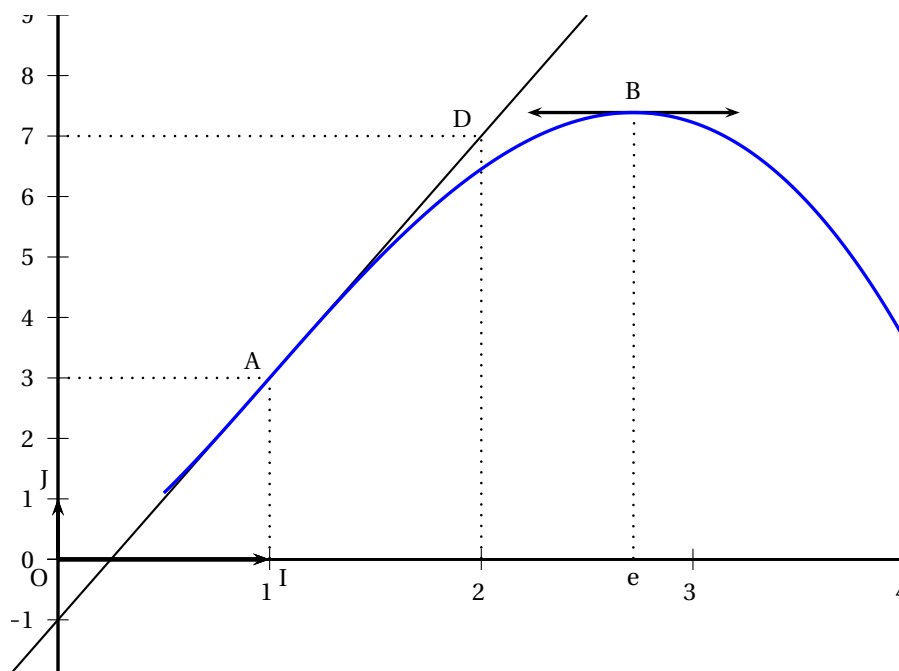
5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0,5; 4]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . La courbe (\mathcal{C}) est représentée ci-dessous.

La courbe (\mathcal{C}) passe par le point A et admet la droite (AD) pour tangente en A.

La courbe (\mathcal{C}) passe par le point B, d'abscisse e , et en B elle admet une tangente horizontale. On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$.



1. En utilisant les données graphiques, donner sans justification
 - a. le nombre de solutions sur l'intervalle $[0,5; 4]$ de l'équation $f(x) = 6$, et une valeur approchée à 0,25 près des solutions éventuelles.
 - b. Le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 4]$.
 - c. Les valeurs de $f'(1)$ et $f'(e)$.
2. Justifier que : $3 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 7$.
3. Soit h , g et j les fonctions définies pour tout réel x de l'intervalle $[0,5; 4]$ respectivement par :

$$h(x) = (4x)(1 - \ln x) \quad g(x) = \frac{e}{x} - 1 \quad j(x) = \frac{2}{e-1}(x-e)(x-3).$$

Parmi ces trois fonctions, deux ne peuvent pas être la dérivée de la fonction f . Lesquelles ? Pourquoi ?

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
- 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

2. Soit $X_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
- Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.
 - Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

3. On admet que pour tout entier naturel n on a :
$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n \\ \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}.$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 %? Justifier.

EXERCICE 3**8 points****Commun à tous les candidats**

Un jeu télévisé se déroule sur quatre semaines maximum, et est organisé de la manière suivante :

Un candidat se présente la première semaine et joue une partie.

S'il la gagne, il a la possibilité de poursuivre en deuxième semaine ou de s'arrêter.

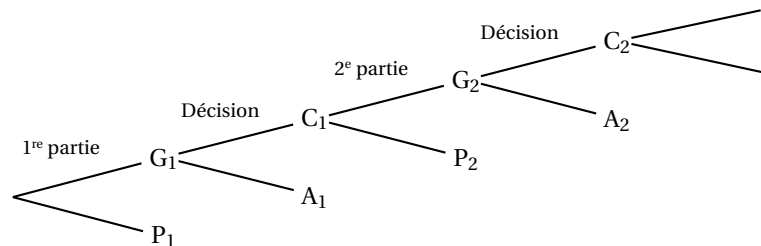
S'il la perd, il est éliminé.

Le même processus s'applique en deuxième et troisième semaine.

À l'issue de la quatrième partie le jeu s'arrête, que le candidat ait gagné ou perdu.

Un candidat ayant joué et gagné les quatre parties est déclaré « grand gagnant ». On admet que pour un candidat donné, la probabilité de gagner une partie est la même chaque semaine et vaut $\frac{3}{5}$. On admet également, qu'un candidat ayant gagné une partie décide d'arrêter le jeu avec une probabilité de $\frac{1}{10}$.

1. On a dessiné le début d'un arbre modélisant le fonctionnement du jeu, pour un candidat donné. Compléter sur la feuille ANNEXE (à rendre avec la copie) l'arbre identique à celui-ci, et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.



G_1 désigne l'évènement : « le candidat gagne la première partie ».

P_1 désigne l'évènement : « le candidat perd la première partie ».

C_1 désigne l'évènement : « le candidat décide de continuer le jeu après la première partie ».

A_1 désigne l'évènement : « le candidat décide d'arrêter le jeu après la première partie ».

On définit de même les évènements $G_2, G_3, G_4, P_2, P_3, P_4, A_2$ et A_3 .

- Calculer la probabilité que le candidat gagne la première partie et arrête le jeu.
- Montrer que la probabilité que le candidat arrête le jeu après avoir gagné la deuxième partie est 0,0324.
- Calculer la probabilité que le candidat soit « grand gagnant » (donner une valeur approchée à 10^{-1} près).
- On attribue un gain de 100 € à un candidat qui gagne la première partie et décide d'arrêter le jeu. On attribue un gain de 1 000 € à un candidat qui a gagné les deux premières parties et décide d'arrêter le jeu. On attribue un gain de 10 000 € à un candidat qui a gagné les trois

premières parties et décide d'arrêter le jeu. On attribue un gain de 100 000 € à un candidat « grand gagnant ».

Dans tous les autres cas, le candidat a perdu et ne gagne rien. On donne le tableau suivant dont une case n'a pas été remplie :

Gain	0 €	100 €	1 000 €	10 000 €	100 000 €
Probabilité (exacte ou arrondie)		0,06	0,0324	0,0175	0,0945

- a. Que vaut la probabilité manquante? Justifier la réponse.
- b. Donner une valeur approchée de l'espérance mathématique du gain à 1 € près.
- c. Interpréter ce résultat.