

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat S Métropole juin 1999 ∞

### Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application  $F$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $m$  d'affixe  $z$  associe le point  $M$  d'affixe  $\frac{1}{2}z^2 - z$ .

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe  $(\Gamma)$  décrite par  $M$  lorsque  $m$  décrit le cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$  et de rayon 1.

Soit  $t$  un réel de  $[-\pi; \pi]$  et  $m$  le point de  $(\mathcal{C})$  d'affixe  $z = e^{it}$ .

1. Montrer que l'image  $M$  de  $m$  par  $F$  est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \sin t \end{cases}, t \in [-\pi; \pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe  $(\Gamma)$ .

2. Comparer  $x(-t)$  et  $x(t)$  d'une part,  $y(-t)$  et  $y(t)$  d'autre part.  
En déduire que  $(\Gamma)$  admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que  $x'(t) = \sin t(1 - 2 \cos t)$ . Étudier les variations de  $x$  sur  $[0; \pi]$ .
4. Montrer que  $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2 \cos t)$ . Étudier les variations de  $y$  sur  $[0; \pi]$ .
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de  $x$  et  $y$  sur  $[0; \pi]$ .
6. Placer les points de  $(\Gamma)$  correspondant aux valeurs  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  et  $\pi$  du paramètre  $t$  et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour  $t = 0$  la tangente à  $(\Gamma)$  est horizontale). Tracer la partie de  $(\Gamma)$  obtenue lorsque  $t$  décrit  $[0; \pi]$  puis tracer  $(\Gamma)$  complètement.

### Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel *non nul*.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt.$$

1. a. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0; 2]$  par  $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ .

Étudier les variations de  $\varphi$  sur  $[0; 2]$ . En déduire que, pour tout réel  $t$  dans  $[0; 2]$ ,

$$\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}.$$

- b. Montrer que, pour tout réel  $t$  dans  $[0; 2]$ , on a

$$\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}.$$

c. Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2} n (e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n (e^{\frac{2}{n}} - 1).$$

d. On rappelle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^h - 1}{h} \right) = 1$ .

Montrer que, si  $(u_n)$  possède une limite  $\ell$ , alors  $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$ .

2. a. Vérifier que, pour tout  $t$  dans  $[0; 2]$ , on a :  $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$ .

En déduire l'intégrale  $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$ .

b. Montrer que, pour tout  $t$  dans  $[0; 2]$ , on a  $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ .

En déduire que  $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$ .

c. Montrer que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite  $\ell$ .

### Exercice 2

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1. a. Calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  et  $c_3$ .
  - b. Combien les écritures décimales des nombres  $a_n$  et  $c_n$  ont-elles de chiffres ?  
Montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.
  - c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que  $b_3$  est premier.
  - d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n \times c_n = a_{2n}$ .  
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de  $a_6$ .
  - e. Montrer que  $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ .  
En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation :

$$(1) \quad b_3 x + c_3 y = 1$$

d'inconnues les entiers relatifs  $x$  et  $y$ .

- a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.
- b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres  $c_3$  et  $b_3$  ; en déduire une solution particulière de (1).
- c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

### Problème

10 points

#### Commun à tous les candidats

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  : on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

**Partie A**

★ Étude d'une fonction  $f$  et de sa courbe représentative  $\mathcal{C}$

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et 0.
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
3. Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = \ln x + x - 3$ .
  - a. Étudier les variations de  $u$ .
  - b. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2; 3]$ . Montrer que  $2,20 < \alpha < 2,21$ .
  - c. Étudier le signe de  $u(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
4. a. Étudier les variations de  $f$ .  
b. Exprimer  $\ln \alpha$  comme polynôme en  $\alpha$ .  
Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ .  
En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .
5. a. Étudier le signe de  $f(x)$ .  
b. Tracer  $\mathcal{C}$ .

**Partie B**

★ Étude d'une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule pour  $x = 1$ .

On appelle  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $F$  relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Sans calculer  $F(x)$ , étudier les variations de  $F$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b. Que peut-on dire des tangentes à  $(\Gamma)$  en ses points d'abscisses 1 et  $e^2$ ?
2. Calcul de  $F(x)$ .
  - a.  $x$  étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale  $\int_1^x \ln t dt$  (on pourra faire une intégration par parties).
  - b. Montrer que, pour tout  $x$  strictement positif :

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$

- c. En déduire l'expression de  $F(x)$  en fonction de  $x$ .
3. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ . En déduire la limite de  $F$  en 0.  
b. Montrer que, pour  $x$  strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$

En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

- c. Dresser le tableau de variation de  $F$ .
- d. Tracer  $(\Gamma)$  sur le même graphique que  $(\mathcal{C})$ .
4. Calcul d'une aire  
Calculer, en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^2$ .