Baccalauréat S Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a\ ;\ -5\ ;\ 1-a)$ et $(1+b\ ;\ 1\ ;\ b)$.

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,

B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,

C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

a. Calculer les probabilités $p\left(A_1\right)$, $p\left(B_1\right)$ et $p\left(C_1\right)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p\left(C_n\right) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p\left(A_{n+1}\right)$ en fonction de $p\left(C_n\right)$ et en déduire que $p\left(\text{A}_n\right) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. **a.** Déterminer la limite de $p\left(A_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p\left(A_n\right)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On pose $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $b = \sqrt{3} - \text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle O$A'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\overline{c} = R^2 \qquad (c-2\text{i})\left(\overline{c}+2\text{i}\right) = R^2 \qquad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right) = R^2.$$

b. En déduire que $c - \overline{c} = 2\text{i}$ puis, que $c + \overline{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

$$\text{(E)} \;:\; 6x + 7y = 57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\text{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm)

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}$.

   a. Étudier le sens de variation de u.

      Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

      Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

   b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^x$ et la droite D d'équation $y = x$. Les courbes Γ et D sont tracées sur la feuille annexe.

1. Soit t un réel ; on désigne par M, le point de Γ d'abscisse t.

   La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.

   Déterminer les coordonnées du point N_t.

2. On désigne par P_t le point de D d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés $(\mathrm{O}\,;\ 1)$, $(M_t\,;\ 1)$, $(P_t\,;\ 1)$ et $(N_t\,;\ 1)$.

   a. Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la feuille annexe.

   b. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.

3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit $\mathbb{R}$?

Partie C

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de la **partie A** sur la feuille annexe.

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

Annexe problème