∽ Baccalauréat S Métropole juin 2003 ∾

Note :
Ce sujet a soulevé l'indignation des candidats et des professeurs de terminale. En rupture brutale avec les usages antérieurs, il était en effet trop difficile, trop long et ne correspondait pas à ce que doit être un sujet d'examen.
L'**A. P. M. E. P.** a choisi de publier, en partant du thème d'un exercice et du problème de cette épreuve, d'autres rédactions possibles qui nous ont paru intéressantes.

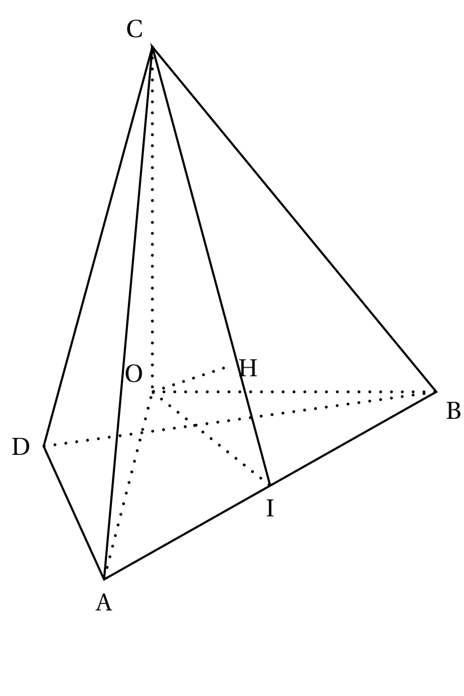
EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - \text{i}$ et $c = 1 + \text{i}$.

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.
   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.
   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.
   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$.
   b. Exprimer z' en fonction de θ.
   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.
   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M′ par r.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{\text{HO}} = \overrightarrow{\text{OD}}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $\text{OH} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OA}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OB}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.
   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$.
   b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

EXERCICE 2 proposé par l'A. P. M. E. P. **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

OABC est un tétraèdre tel que :
— OAB, OAC, OBC, sont trois triangles rectangles en O.
— OA = OB = OC.

Le dessin fourni en annexe sera complété au fur et à mesure de l'avancement du problème, et rendu avec la copie.
(Je propose que seul le tétraèdre OABC soit représenté, avec une disposition qui permette ultérieurement de bien distinguer les points O et K, les droites (CK) et (CO), les droites (AK) et (AO), et de placer le repère dans la disposition habituelle).

1. On nomme K le point du plan ABC qui est le point de concours des trois médiatrices du triangle ABC. Montrer que K est aussi l'isobarycentre de A, B, C.
2. On choisit la distance OA comme unité de longueur, et on munit l'espace du repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, qui est alors orthonormé.
   a. Déterminer les coordonnées de K.
   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{OK}}$ est normal au plan ABC.
   c. Calculer la distance de O au plan ABC.
3. On rappelle que, dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est défini de deux façons équivalentes :
   — c'est le plan orthogonal au segment et passant par son milieu
   — c'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à égale distance des deux extrémités du segment.

   a. Montrer que le plan médiateur P du segment [AB] est le plan COK.
   Déterminer le plan médiateur Q du segment [BC].
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace situés à égale distance des trois points A, B, C.
4. Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{\text{OD}} = \overrightarrow{\text{KO}}$, et soit Ω l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
   a. Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].
   b. Montrer que Ω est le centre d'une sphère S contenant les quatre sommets du tétraèdre ABCO (S se nomme sphère circonscrite au tétraèdre).

5. Les unités d'aire et de volume étant celles attachées au repère, calculer :
   — l'aire du triangle ABC ;
   — la mesure de la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD ;
   — le volume du tétraèdre ABCD ;
   — le volume de la sphère S.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.
   b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.
   c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.
   Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.
2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
   Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

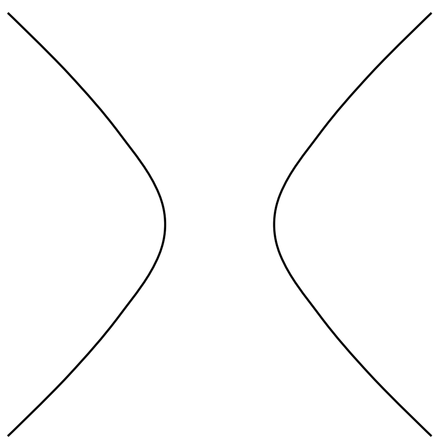


Figure 1

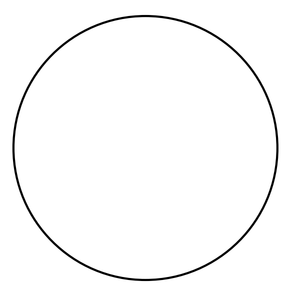


Figure 2

3. **a.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution,
   b. Montrer la propriété suivante :
   pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.
4. **a.** Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
   si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.
   b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. **a.** Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

   $$\text{(E}'\text{)} \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

   b. Résoudre (E$'$).

   c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E$'$), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\mathrm{M}}{1 + C\mathrm{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

   b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\mathrm{M}}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\text{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(0{,}5\,;\,2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.
2. Sachant que $g(0) = \text{N}_0$ et que $\text{M} = 100\ \text{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

PROBLÈME proposé par l'A. P. M. E. P. **11 points**
Commun à tous les candidats

On étudie une population de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$.
Ce problème a pour objet l'étude de trois modèles d'évolution de cette population.
Dans tout le problème, la population initiale sera de 1 million d'individus, et on exprimera le temps en heures, et la population de bactéries en millions d'individus.

Partie A
Un modèle discret
On suppose que la population double toutes les demi-heures.

1. Combien y-a-t-il de bactéries au bout d'une heure ? au bout de deux heures ?
2. Soit $P(n)$ le nombre d'individus au bout de n heures. Donner l'expression de $P(n)$ en fonction de n.
3. Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 100 millions d'individus ?
Quelle est la limite de la suite $(P(n))$?

Partie B
Un premier modèle continu

On s'intéresse à la population de bactéries à l'instant t.
Pour faciliter le traitement mathématique, on la représente par une fonction continue et dérivable $f(t)$ (ceci malgré le fait qu'en toute rigueur, elle devrait être forcément un nombre décimal n'ayant pas plus de 6 décimales, puisqu'il y a un nombre entier de bactéries).
On prend pour hypothèse dans ce premier modèle continu qu'à chaque instant l'accroissement de la population par unité de temps, $f'(t)$, est proportionnel à la population.
Cela revient à dire qu'il existe un coefficient a strictement positif et invariant au cours du temps tel que $f'(t) = af(t)$.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' = ay$, et en déduire l'expression de $f(t)$, en prenant en compte la population initiale.
   b. On suppose que la population double toutes les demi-heures. En déduire la valeur de a.
2. On suppose désormais que la population à l'instant t est : $f(t) = \mathrm{e}^{t\ln 4} = 4^t$.
   a. Dans ce modèle, combien y-a-t-il de bactéries au bout de 10 minutes, au bout de 1 h 40 ?
   Quelle est la limite de $f(t)$ en plus l'infini ?
   b. Si l'instant initial était midi, à quelle heure, à la minute près, la population atteindrait-elle 100 millions ?
   c. Comparer $f(n)$ et $P(n)$; qu'apporte cette deuxième modélisation par rapport à la première ? (On peut comparer les questions posées dans A et dans B pour évaluer les « performances »de chaque modélisation.)

Partie C
Un modèle continu moins simpliste : l'équation logistique

L'expérience montre que le nombre de bactéries ne peut pas croître sans limite comme dans le modèle précédent. Pour améliorer le modèle, on introduit un terme négatif dans l'équation différentielles qui va avoir pour effet de diminuer la vitesse du phénomène. Ce modèle a été imaginé par Verhulst en 1838.
Dans ce paragraphe, la population à l'instant t est notée $g(t)$; elle est supposée définie sur l'ensemble des réels positifs ou nuls, dérivable et strictement positive et elle est solution de l'équation différentielle :

$$y' = y\ln(4) - ky^2$$

où k est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales.

1. Résolution de cette équation différentielle :
   a. Prouver, pour toute fonction g dérivable et strictement positive, l'équivalence suivante :

$$\left(\forall t,\ g'(t) = g(t)\ln 4 - k(g(t)^2\right) \iff \left(\forall t,\ \left(\frac{1}{g}\right)'(t) = -\frac{1}{g(t)}\ln 4 + k\right).$$

   b. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y\ln(4) + k$.
   c. Déduire de a. et b. une expression de $g(t)$ en prenant en compte la condition initiale : $g(0) = 1$.
   d. On suppose dans cette question que : $g(t) = \dfrac{\ln 4}{(\ln 4 - k)\mathrm{e}^{-t\ln 4} + k}$.
   Des mesures expérimentales montrent que la population finit par se stabiliser à 100 millions d'individus. On traduit cette stabilisation par la condition : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 100$.
   Quelle est la valeur de k pour que cette condition soit remplie.
2. Comportement de ce modèle.
   On suppose désormais que $g(t) = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{t\ln 4}} = \dfrac{100}{1+99\times 4^t}$.
   a. Vérifier que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E)

$$y' = y\ln 4 - \frac{\ln 4}{100}y^2$$

   et qu'elle vérifie les deux conditions $g(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 100$.

b. Comparer les nombres 100 et $g(t)$.

c. Établir le tableau de variation complet de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Tracer dans un repère adapté aux données la représentation graphique (T) de g.

d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation : $g(T) = 50$.
On note la solution d.

Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II