∽ Baccalauréat S Métropole septembre 1995 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Le président d'une association sportive constate que, chaque année, l'association garde 75 % de ces anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux inscrits.
On suppose que l'évolution du nombre d'adhérents reste le même au fil des années. On se propose d'étudier cette évolution.
On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années. On sait qu'au démarrage de l'association il y avait 1 600 adhérents ($u_0 = 1\,600$).

1. Montrer que pour tout entier n,

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 800.$$

2. On pose $v_n = 3\,200 - u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Vérifier que $v_{n+1} = 0,75v_n$.
Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que $u_n = 3\,200 - 1\,600 \times (0,75)^n$.
Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Que peut-on en déduire concernant le nombre d'adhérents de l'association ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

2. Soit K, L, M les points d'affixes respectives :

$$z_K = 1 + i \quad ; \quad z_L = 1 - i \quad ; \quad z_M = -i\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.
Unité graphique : 4 cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3. a. On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L.
Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$.

b. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.
Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

c. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe 2i transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.

4. a. Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC]. Zc - ZK

b. Montrer que : $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{K}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{K}}} = 1$.

c. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Soit A et B deux points distincts du plan et G le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A},\ 2)\,;\ (\text{B},\ -1)\}$.

1. Démontrer que le point A est le milieu du segment [GB].

2. Montrer que l'ensemble Γ des points N tels que $\dfrac{N\text{B}}{N\text{A}} = \sqrt{2}$ est un cercle de centre G dont on précisera le rayon en fonction de AB.

3. Soit C un point de Γ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2\,\overrightarrow{M\text{A}}^2 - \overrightarrow{M\text{B}}^2 - \overrightarrow{M\text{C}}^2 = 0.$$

a. Montrer que le point C appartient à $\mathcal{L}$.

b. En écrivant $\overrightarrow{M\text{A}} = \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{\text{CA}}$ et $\overrightarrow{M\text{B}} = \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{\text{CB}}$, montrer que pour tout point M de $\mathcal{L}$, on a

$$\overrightarrow{M\text{C}} \cdot \overrightarrow{\text{CG}} = 0.$$

c. Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{L}$.

Problème — 11 points

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
$(\mathcal{C})$ est la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 1 cm).

Partie A : étude de la fonction f

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.

2. **a.** Vérifier que si x appartient à D, alors :

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|.$$

b. Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.

c. Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.

d. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty\,;\,3[$ pour une seule valeur α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;\,3[$.

e. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]3\,;\,+\infty[$.

f. Dresser le tableau de variation de f.

3. Étudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à $(\mathcal{C})$.

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de l'axe des abscisses.

5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B : calcul d'une aire

$\mathcal{A}$ désigne l'aire en cm^2 de la région comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 3 :

$$\frac{x^2 + 2x}{3 - x} = ax + b + \frac{c}{3 - x}.$$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{t^2 + 2t}{3 - t}\, \mathrm{d}t.$$

3. Grâce à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.