Baccalauréat S Métropole septembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

— s'il a arrêté le $n-$ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n+1)$-ième] est 0,8 ;

— s'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 ;

— la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

Dans tout l'exercice, si E est un évènement, on note $p(E)$ la probabilité de E, $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

On note $P(E/F)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement E sachant que F est réalisé.

A_n est l'évènement « le gardien arrête le n-ième tir ». On a donc $P\left(A_1\right) = 0,7$.

1. a. Donner, pour $n \geqslant 1$, les valeurs de $P\left(A_{n+1}/A_n\right)$ et $P\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)$.

b. Exprimer $P\left(A_{n+1} \cap A_n\right)$ et $P\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$ en fonction de $P\left(A_n\right)$.

c. En déduire que, pour tout entier strictement positif $n \geqslant 1$, on a :

$$P\left(A_{n+1}\right) = 0,2P\left(A_n\right) + 0,6.$$

2. On pose à présent, pour $n \geqslant 1$, $p_n = P\left(A_n\right)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $0,2$.

b. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

c. Montrer que $\left(p_n\right)$ admet une limite que l'on calculera.

EXERCICE 2 (OBLIGATOIRE) **4 POINTS**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère :

— le point A d'affixe $a = 5 - \text{i}\sqrt{3}$;

— le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

— le milieu Q de [OB].

1. a. Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2\text{i}\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q.

b. Déterminer l'affixe z_{K} du point K tel que ABQK soit un parallélogramme.

c. Démontrer que $\dfrac{z_{\text{K}} - a}{z_{\text{K}}}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ?

Préciser la nature du quadrilatère OQAK.

d. Placer les points A, B, Q et K dans le plan.

2. Soit C le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$.

a. Calculer $\dfrac{z_{\text{K}} - b}{z_{\text{K}} - c}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

b. Placer C sur la figure.

EXERCICE 2 (OBLIGATOIRE) **4 POINTS**

n et c étant deux entiers naturels non nuls, le but de l'exercice est de comparer le PGCD de (cn) et de $2n+1$ au PGCD de c et de $2n+1$ et de déterminer selon les valeurs de n le PGCD des deux nombres $A = 3n$ et $B = 2n+1$.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. En utilisant le théorème de Bezout démontrer que pour tout entier naturel c non nul le PGCD de (cn) et de $2n+1$ est égal au PGCD de c etde $2n+1$.
3. En déduire que le PGCD de A et B est le PGCD de 3 et de $(2n+1)$.
4. Déterminer le PGCD de 3 et de $(2n+1)$ selon les valeurs de n en utilisant, par exemple, les 3 valeurs possibles du reste dans la division euclidienne de n par 3.

PROBLÈME

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + \mathrm{e}^{2x}.$$

I. Études des variations de f

1. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) > 0$.

   b. En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule qu'on note α.

   c. Vérifier la double inégalité $-0,5 < \alpha < -0,4$.
3. **a.** Préciser, suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f'(x)$.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

   d. Tracer, en se limitant à l'intervalle $\left[-2\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

II. Interprétation géométrique de f

On note Γ la courbe représentative, dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ introduit dans la partie I, de la fonction g définie par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Exprimer la distance OM du point O au point M de Γ d'abscisse x en fonction de $f(x)$.

   b. Traduire alors les résultats obtenus dans la partie I en une propriété concernant la variation de la distance OM quand M parcourt Γ.
2. Soit A le point de Γ d'abscisse α (α a été introduit dans la partie I ; on rappelle que $f'(\alpha) = 0$).

   a. Écrire une équation de la tangente T à Γ en A.

   b. Quelle relation peut-on écrire entre les cœfficients directeurs des droites (OA) et T ? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

   c. On note β l'abscisse du point d'intersection de la droite T avec l'axe $(\mathrm{O},\ \vec{\imath})$.
   Calculer en fonction de α et en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe Γ, la tangente T et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$.