Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole septembre 1998 ∽

Exercice 1 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\qquad B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}\qquad C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\qquad I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\qquad K\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice 2 **5 points**

1. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

   a. Calculer $P(4)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ tel que :
   $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = 2$ cm.
   Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

   a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

   a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

   b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

   a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

   b. Calculer l'affixe du point H.

   c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Problème **11 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 4y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -\mathrm{e}$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}.$$

   a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

   b. Étudier le sens de variation de de f.

   c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   d. Dresser le tableau de variations de f.

   e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

   Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O ?

   Écrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse (-1).

   f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

   Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + \mathrm{e}x\mathrm{e}^{x}.$$

   a. Étudier le sens de variation de h.

   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a. Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées $(u,\ v)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & u & \leqslant & 0 \\ 0 & \leqslant & v & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

3. Calculer $\mathscr{A}(-1)$.

4. $\mathscr{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?