

## ⌘ Baccalauréat S Métropole septembre 2001 ⌘

### Exercice 1

6 points

#### Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes  $a$  et  $b$  contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes  $a$  et  $b$  proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note  $A$  l'évènement « l'urne  $a$  est choisie »,  $B$  l'évènement « l'urne  $b$  est choisie » et  $R$  l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note  $p_A(R)$  la probabilité conditionnelle de l'évènement  $R$  par rapport à l'évènement  $A$ .

1. Dans cette question, l'urne  $a$  contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne  $b$  contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

a. Déterminer les probabilités suivantes :  $p(A)$ ,  $p_A(R)$ ,  $p(A \cap R)$ .

b. Montrer que

$$p(R) = \frac{13}{30}$$

c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne  $a$ ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne  $a$  contient quatre boules blanches et l'urne  $b$  deux boules blanches. L'urne  $a$  contient en outre  $n$  boules rouges (où  $n$  désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne  $b$  en contient  $5 - n$ .

a. Exprimer  $p_A(R)$  et  $p_B(R)$  en fonction de  $n$ .

b. Démontrer que

$$p(R) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}.$$

c. On sait que  $n$  ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes  $a$  et  $b$  donnant la plus grande valeur possible de  $p(R)$ .

### Exercice 2

5 points

#### Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct.

Soit  $A$  le point d'affixe  $i$  et  $B$  le point d'affixe  $-i$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{C} - \{i\}$  par :

$$f(z) = \frac{1 - iz}{z - i}.$$

1. Vérifier que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C} - \{i\}$

$$f(z) = -i + \frac{2}{z - i}.$$

2. a. Démontrer que  $-i$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .

b. Déterminer les antécédents de 0 et de  $i$  par  $f$ .

3. À tout point  $M$  différent de  $A$ , d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = f(z)$ .

a. Démontrer que pour tout point  $M$  différent de  $A$ , le produit des longueurs  $AM$  et  $BM'$  est égal à 2 ( $AM \cdot BM' = 2$ ).

- b. Démontrer que lorsque  $M$  décrit le cercle  $C$  de centre  $A$  et de rayon 4,  $M'$  se déplace sur un cercle  $C'$  dont on précisera le centre et le rayon.
4. a. Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M(z)$  tels que  $z - i$  soit un nombre réel non nul.
    - b. Démontrer que lorsque  $M$  décrit  $E$ ,  $M'$  se déplace sur une droite  $\Delta$  que l'on précisera.
    - c. Lorsque  $M$  décrit  $E$ ,  $M'$  décrit-il toute la droite  $\Delta$ ?
  5. Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $f(z)$  soit un imaginaire pur non nul.

## Exercice 2

5 points

### Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.
  - b. Soit l'équation  $168x + 20y = 6$  dont les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions?
  - c. Soit l'équation  $168x + 20y = 4$  dont les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions?
2. a. Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs  $m$  et  $p$  tels que  $42m + 5p = 1$ .
  - b. En déduire deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $42u + 5v = 2$ .
  - c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs  $(x; y)$  est solution de l'équation  $42x + 5y = 2$  si, et seulement si  $42(x + 4) = 5(34 - y)$ .
  - d. Déterminer tous les couples d'entiers  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation  $42x + 5y = 2$ .
3. Déduire du 2. les couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation  $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$ .

## Problème

9 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 1 cm.

### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Étudier le sens de variation de  $f$  et donner le tableau de variation de  $f$ .
  - b. Tracer  $\mathcal{C}$ .
3. Soit

$$I = \int_{-3}^0 f(x) dx.$$

- a. Interpréter graphiquement  $I$ .

b. En utilisant l'intégration par parties, calculer

$$\int_{-3}^0 x e^x dx,$$

puis

$$\int_{-3}^0 x^2 e^x dx.$$

c. En déduire la valeur exacte de I.

### Partie B

1. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = e^{(x^2+ax+b)}.$$

Quelles sont les valeurs de  $a$  et de  $b$  pour lesquelles le tableau de variations de  $g$  est celui donné ci-dessous ?

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = e^{(x^2-3x+1)}$$

et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le repère  $\mathcal{R}$ .

- Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est axe de symétrie de  $\Gamma$ .
- Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près d'une solution de l'équation  $h(x) = 5$  ».
- Soit  $\alpha$  un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Établir que

$$0,28 \leq h(\alpha) \leq 0,47.$$

### Partie C

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont le tableau de variation est donné ci-dessous ( $a$ ,  $b$  et  $c$  étant trois nombres réels).

$x$	$-\infty$	$0$	$a$	$b$	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		$c$	$0$	$+\infty$

Soit  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  les fonctions définies par :

$$v_1(x) = e^{u(x)} \quad v_2(x) = u(e^x) \quad v_3(x) = u(x)e^x.$$

- Déterminer le sens de variation des fonctions  $v_1$  et  $v_2$  (en justifiant votre réponse).
- Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction  $v_3$  (en justifiant votre réponse).