Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole septembre 2005

Exercice 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   - **a.** On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle :
     $(\mathrm{E}')\ y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   - **b.** Résoudre l'équation différentielle (E').
   - **c.** Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a alors :

   A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\text{i}$. **C** : $z^{14} = -64 + 64\text{i}\sqrt{3}$.
   B : $z^{14} = 64 - 64\text{i}$. **D** : $z^{14} = -128 + 128\text{i}\sqrt{3}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4\text{i}|$.
   A : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
   B : (E) est la droite (ST) ;
   C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3 - 4\text{i}$, et de rayon 3 ;
   D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{CF}}$ est égal à :

   A : $\sqrt{3}$ **B** : -3 **C** : $-\sqrt{3}$ **D** ; $\dfrac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
   B : Γ n'admet pas d'asymptote.
   C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.
   D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

   A : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2t\text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. **C** : $f''(x) = -2x\text{e}^{-x^2}$.
   B : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2x\text{e}^{-x^2}\,\text{d}x$. **D** : $f''(x) = \text{e}^{-x^2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad \text{(modulo 6)}.$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.
B : il n'y a aucune solution.
C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad$ (modulo 6).
D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad$ (modulo 6) ou $x \equiv 5 \quad$ (modulo 6).

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (34k - 7\,;\,5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
B : L'équation (E) n'a aucune solution.
C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (17k - 7\,;\,5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (-7k\,;\,5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :
A : $n \equiv 4 \quad$ (modulo 17) et $p \equiv 0 \quad$ (modulo 17).
B : p est un nombre premier.
C : $p \equiv 4 \quad$ (modulo 17).
D : $p \equiv 1 \quad$ (modulo 17).

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$.

C : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.

B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.
A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].
C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;\,1\,;\,5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

c. Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t\ ;\ 3-t\ ;\ t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
   c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les évènements suivants :
E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$.
On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9^e^ décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?