∽ Baccalauréat S Métropole 13 septembre 2012 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

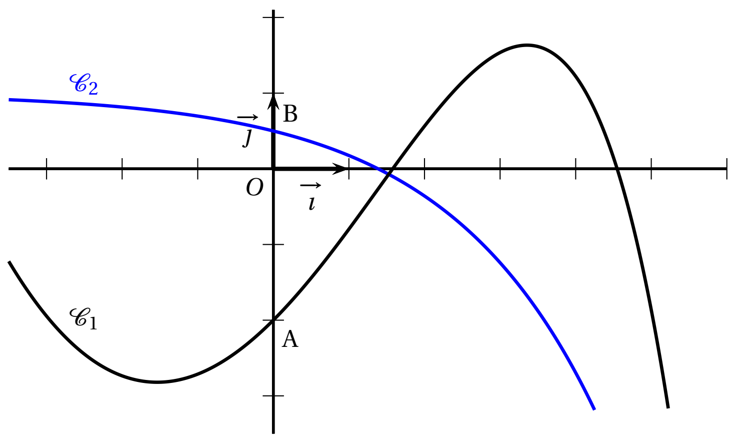
x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$		b	
	$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\dfrac{1}{2}$ respectivement.

L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



a. Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'. Justifier la réponse.

b. À l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x,

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

a. Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x,
$g(x) - 2g'(x) = x$.

b. Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$.

c. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

d. En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

   On prélève au hasard une boule de l'urne.
   Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.
   Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

   a. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

   b. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.
   Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.
   On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.
   La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

   a. Donner l'expression de p en fonction de n.

   b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

   c. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   c. On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.
4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0,5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

   En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1 + 2\text{i}| = |z + 3 - 4\text{i}|$ est une droite passant par le point H d'affixe $5 + 5\text{i}$.
2. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2 - \text{i}$, $1 + \text{i}$ et $3 - 2\text{i}$.
   L'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -2 est le point C.
3. Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \text{i})z.$$

   L'image d'une droite d du plan par la transformation f est une droite qui est perpendiculaire à la droite d.

   Pour les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

4. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + y - 7 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 2-t\\ y &=& 1+3t\\ z &=& t\end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + 3y - 4z + 1 = 0$ et A le point de coordonnées $(1 ; 4 ; -1)$.
La sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 4 est sécante au plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit $(E) \quad 5x + 6y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.
Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(18k+3,\ -15k-2)$ où k est un entier relatif.
2. Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7 est égal à 6.

Pour les questions suivantes, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe $2 - \text{i}$ et B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Le point C est le milieu du segment [AB].

3. Le point C est l'image du point O par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit f la similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (-1+\text{i})z$.
La transformation composée $f \circ f$ transforme la droite (AB) en une droite qui est perpendiculaire à (AB).
5. La transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1-\text{i})z + 3 - \text{i}$, est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.