Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole septembre 1994 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Dans un plan on donne une droite (Δ) et un point O n'appartenant pas à (Δ). On note H le projeté orthogonal de O sur (Δ). Pour la figure on prendra OH = 4 cm.
Un point P décrit la droite (Δ).
La perpendiculaire en P à (Δ) et la perpendiculaire en O à la droite (OP) se coupent en un point M ; soit I le milieu de $[PM]$.

1. Montrer que $I\text{O} = IP$ et en déduire que, lorsque P décrit (Δ), le point I appartient à une parabole (C) dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On considère un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ où $\overrightarrow{\text{OH}} = \vec{\imath}$.
   a. On note $(x\,;\,y)$ les coordonnées du point M dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}M}\cdot\overrightarrow{\text{O}P}$ et en déduire une équation cartésienne de l'ensemble (C') décrit par le point M quand P décrit (Δ).
   b. Montrer que (C') est une parabole dont on précisera le foyer O$'$ et la directrice (Δ').
3. Placer approximativement sur le dessin les courbes (C) et (C').

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC direct (c'est-à-dire que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ admet une mesure comprise entre 0 et π).
ACDE est le carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$; on désigne son centre par O.
AFGB est le carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AF}},\,\overrightarrow{\text{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$; on désigne son centre par O$'$.
I est le milieu de [BC], J est le milieu de [EF].

1. En utilisant la rotation de centre A et d' angle $\dfrac{\pi}{2}$ démontrer que l'on a :
$$\left(\overrightarrow{\text{FC}},\,\overrightarrow{\text{BE}}\right) = \frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad\text{et FC = BE.}$$
2. En déduire que le triangle OIO$'$ est un triangle rectangle en I et isocèle.
3. Démontrer que JO$'$IO est un carré.

PROBLÈME **12 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 1 + x - \text{e}^x$$
et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

a. Établir le tableau de variations de f en précisant les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

c. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = x - 2$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie E du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

Partie B

Dans cette partie, à tout point M du plan, de coordonnées $(x\,;\,y)$, on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Soit T l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = (-1 - \mathrm{i})z + 1$.

1. Donner la nature de T et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1.

3. Déterminer les équations des transformées par T des droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

4. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;\,2[$ par

$$f_1(x) = 1 - x - 2\ln(2 - x)$$

et soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Soit M un point de $\mathscr{C}$ et $M_1 = T(M)$.
Montrer que l'abscisse x_1 de M_1 est strictement inférieure à 2 et que M_1 est sur la courbe CI.
Inversement, si MI est sur la courbe $\mathscr{C}_1$, montrer qu'il existe un point M de la courbe $\mathscr{C}$ tel que $M_1 = T(M)$.
En déduire que $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par T.

Partie C

1. Établir le tableau de variations de f_1 en précisant les limites de f_1 en $-\infty$ et 2.
On pourra remarquer que :

$$f_1(x) = (2 - x)\left[\frac{1 - x}{2 - x} - 2\frac{\ln(2 - x)}{2 - x}\right].$$

2. Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;\,2[$ par

$$g(x) = 2x - \mathrm{e}^x + 2\ln(2 - x) = f(x) - f_1(x).$$

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

3. **a.** Déterminer le sens de variation de g' sur $]-\infty\,;\,2[$. Calculer $g'(0)$.

b. Établir le tableau de variation de g sur $]-\infty\,;\,2[$ en précisant les limites de g en $-\infty$ et 2.

c. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement 2 solutions α et β dans $]-\infty\,;\,2[$, $(\alpha < \beta)$.
Vérifier que $-0,9 < \alpha < -0,8$ et $0,6 < \beta < 0,7$.

d. Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

5. On appelle E_1 la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équations respectives $y = 1 - x$ et $x = -1$.
On admet que la partie E est transformée en E_1 par T.
Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ de la partie E_1.