Baccalauréat S Métropole septembre 1996

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Tous les résultats demandés dans l'exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient cinq boules : deux blanches, trois noires, indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   a. Calculer la probabilité de tirer :
   (i) deux boules blanches ;
   (ii) deux boules de la même couleur.
   b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage. Donner la loi de probabilité de X ; calculer l'espérance de la variable X.
2. On effectue un tirage de deux boules de l'urne de la manière suivante :
   on tire une première boule de l'urne et on note sa couleur ; on la remet ensuite dans l'urne en ajoutant en plus dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée (il y a donc dans l'urne six boules avant le second tirage) ; on tire ensuite une seconde boule.
   On considère les évènements suivants :
   — B_1 : « on obtient une boule blanche au premier tirage » ;
   — N_1 : « on obtient une boule noire au premier tirage » ;
   — B_2 : « on obtient une boule blanche au second tirage ».

   a. Calculer :
   — $P(B_2/B_1)$ (probabilité conditionnelle de B_2 sachant que B_1 est réalisé) ;
   — $P(B_2/N_1)$ (probabilité conditionnelle de B_2 sachant que N_1 est réalisé).
   b. Calculer la probabilité de l'évènement B_2.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe i.
À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les points M tels que l'on ait $M = M'$.
   b. Déterminer le point B$'$ associé au point B d'affixe 1 ; déterminer le point C tel que le point associé C$'$ ait pour affixe 2.
2. Étant donné un nombre complexe z, distinct de i, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
   a. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.
   c. Placer A, B, B$'$, C, C$'$ et Γ sur une figure (unité graphique : 4 cm).
3. Soit z un nombre complexe différent de i.

a. Montrer que l'on a $z' - \mathrm{i} = \dfrac{-1}{z - \mathrm{i}}$.

b. On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle γ de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à γ.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I, tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Étant donné un point M du segment [BD], distinct de B et distinct de D, on appelle N, P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB), (AD) et (DC).

1. On considère les isométries suivantes : r est la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, r' la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

a. Déterminer les points $(r' \circ t)(\mathrm{A})$ et $(r' \circ t)(\mathrm{B})$.
Préciser la nature de l'application $r' \circ t$. En déduire que $r' \circ t = r$.

b. Déterminer $t(\mathrm{N})$. Démontrer que $r(N) = P$.
En déduire que :

$$\overrightarrow{N\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{N\mathrm{B}} = \overrightarrow{P\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{P\mathrm{D}}.$$

c. Démontrer les égalités :

$$\overrightarrow{N\mathrm{A}}.\overrightarrow{M\mathrm{C}} = \overrightarrow{N\mathrm{A}}.\overrightarrow{N\mathrm{B}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P\mathrm{A}}.\overrightarrow{M\mathrm{C}} = \overrightarrow{P\mathrm{A}}.\overrightarrow{P\mathrm{D}}.$$

En déduire que les droites (MC) et (NP) sont orthogonales.

2. Soit M' le symétrique du point M par rapport à la droite (NP).
Montrer que les points N, P et M' appartiennent au cercle de diamètre [AM] et que les points M, C et M' sont alignés.
En déduire que le point M' appartient au cercle circonscrit au carré ABCD.

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie I

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 3y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer la solution f de (E) telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x}.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Pour la figure, on se limitera aux points de la courbe dont l'abscisse est comprise entre -4 et $0,5$ et on prendra pour unité graphique 4 cm.

1. Variations de f

a. Calculer la dérivée f' de f.

b. Résoudre l'équation $3e^{2x} = 1$; étudier le signe de $3e^{2x} - 1$ selon les valeurs de x.

c. En déduire le signe de f' et les variations de f.

2. Limites aux bornes de f

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (on pourra mettre e^{3x} en facteur).

3. Étude de f à l'origine

a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - 2x.$$

Calculer $\varphi(0)$ et montrer que, pour tout nombre réel x, on peut écrire :

$$\varphi'(x) = \left(e^{x} - 1\right)\left(3e^{2x} + 3e^{x} + 2\right).$$

c. Étudier les variations de φ.

d. En déduire le signe de $\varphi(x)$ et préciser la position de C par rapport à T.

4. Tracer C et T.

Partie III

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$.

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que α appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

c. Montrer que α satisfait à la relation :

$$g(\alpha) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{-\alpha}\right).$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{-x}\right).$$

a. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.

b. Calculer la dérivée g' de g.

c. Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.