Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

   a. Déterminer les nombres réels $a,~b$ et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \,\mathrm{d}x.$$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.
Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

   La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h; retrouver les variations de la fonction h.

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple $(a,\ b)$ est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $[1\,;\,\text{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments KI et K2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

— une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$;

— une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,

C1 : « la particule entre dans K1 »,

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B; chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}.$$

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; -1), (D ; + 1), (B ; + 1).

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.
Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

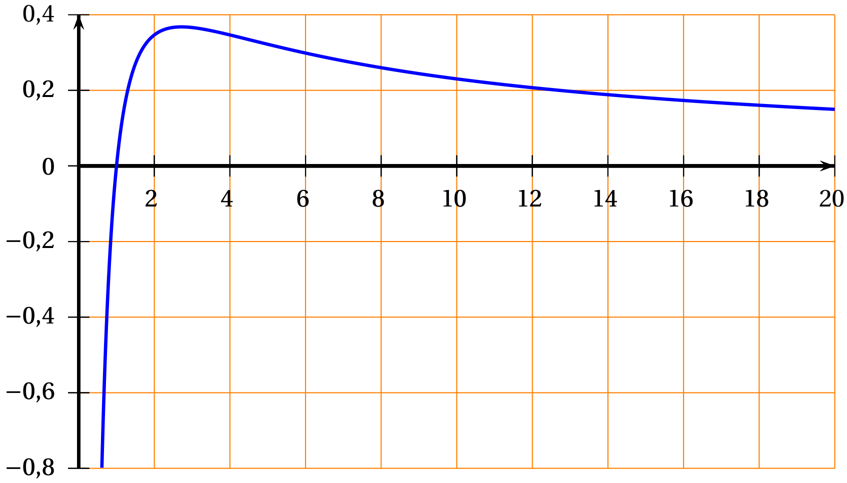
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.
Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.
En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie



Courbe $\mathscr{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbes

Annexe spécialité