Baccalauréat S Métropole septembre 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

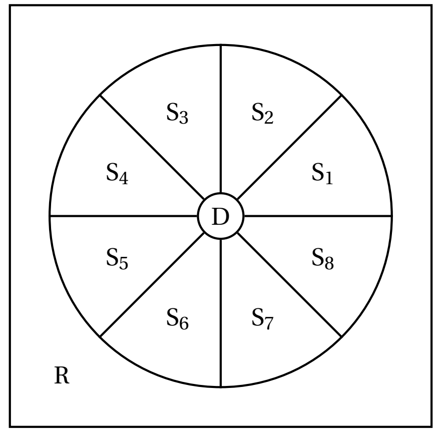
Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

— un disque D de rayon 1 cm,

— 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,

— une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(\text{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes :
   $p(\text{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$,
   $p(\text{S}_k) = 0{,}0785$.
   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   — un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros;
   — un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
   — un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.
   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité $p(\text{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1}.$$

1. **a.** Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\text{i}$.

b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. a. Écrire le nombre complexe $(1 - \mathrm{i})$ sous forme trigonométrique.

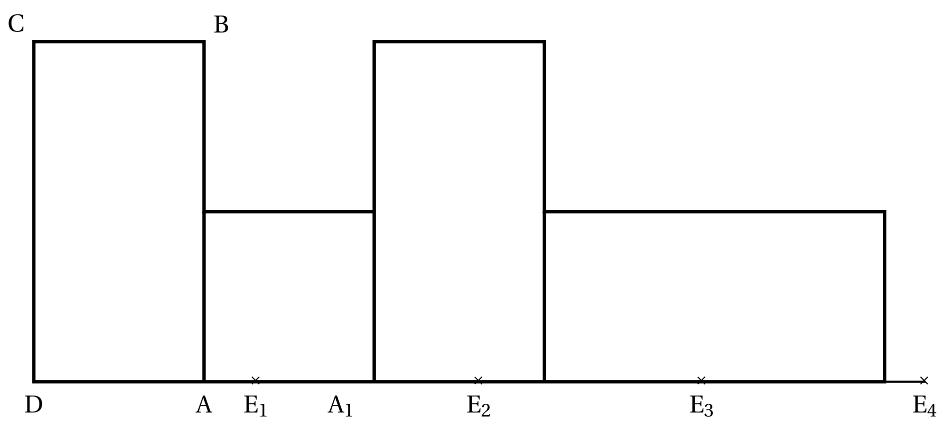
b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que :
$\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que
$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.

1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$ et $r'(\mathrm{B}) = \mathrm{P}$.
Déterminer l'angle de r'.

b. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}A_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}E_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k,\ A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.
   a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   b. Calculer $g'(x)$. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée sur la feuille annexe avec sa tangente au point d'abscisse e.
On admet l'égalité suivante : $f(x) = 2x\left[a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right]$ où a, b et c désignent trois réels.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $f'(\mathrm{e})$.
3. En déduire l'égalité : $f(x) = 2x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$.
4. Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité :
$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-t}\left[2t^2 + 3t + 2\right].$$
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Montrer pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.
7. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Partie C :

1. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la feuille annexe, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en **partie A**.
2. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - 1$.
   b. Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = 2$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$ par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Montrer que, pour tout x appartenant $[0{,}1\,;\,0{,}3]$, on a : $\varphi'(x) > 0$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

2. On définit la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$ par l'expression suivante : $h = g \circ f$.

a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.

b. Déterminer le sens de variation de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer que $h(\alpha) = g \circ f(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.