Baccalauréat S Métropole septembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.
   b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?
2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4i.

1. Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
   On considère le point E d'affixe $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{\text{O}E}, \overrightarrow{\text{O}F}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?
2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :
$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$
3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].
   a. Prouver que PQRS est un parallélogramme.
   b. On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_\text{P}}$.
   Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.
4. **a.** Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?

c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ?
Quelle est alors l'affixe de E ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Soit le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).

2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_{G} de G.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].

3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.

a. Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.

b. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

c. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?

d. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.

4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.

a. Déterminer a' et b' pour que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{G}$ et $f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.

b. Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(\mathrm{I})$. f est-elle une réflexion ?

c. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A :

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{\mathrm{e}^2} + (p+1)I_p.$$

c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement $I_2,\ I_3,\ I_4$.

d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathscr{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathscr{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Partie B :

Soit a un réel strictement positif et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

1. Écrire une équation de T_a.
2. Déterminer les réels a, pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathscr{C}$, passant par O.
   Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie C :

On étudie maintenant l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
   Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0 ; \mathrm{e}[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + \mathrm{e}\ln x$.
   a. Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]\,0,\ +\infty[$.
   b. Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.
   c. En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.