# ✿ Baccalauréat C Métropole groupe III[1] 1988 ✿

**EXERCICE 1** **5 POINTS**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que pour tout réel $x$ :

$$f''(x) - f(-x) = x.$$

On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$.

1. **a.** Calculer à l'aide de $f$ et de ses dérivées $f'$, $f''$ les dérivées premières et secondes de $h$ et de $g$.

   **b.** En déduire que les fonctions $h$ et $g$ vérifient les équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcll} g'' & = & g & (1)\\ h'' & = & -h. & (2)\end{array}\right.$$

2. Déterminer l'ensemble des fonctions paires solutions de (1) et l'ensemble des fonctions impaires solutions de (2).
3. Exprimer $f$ en fonction de $g$ et $h$. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes réelles $\lambda$ et $\mu$ telles que pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \lambda\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \mu \sin x + x.$$

   Inversement, une telle fonction est-elle solution du problème posé ?

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

1. Dans un plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}\right)$ est égal à $+\dfrac{\pi}{2}$.
   Soit (A, B, C, D) un parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

   **a.** Montrer que les droites (AD) et (OC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie $s$ de centre O.
   Montrer que O est le centre du parallélogramme ABCD.

   **b.** Soit $\Delta$ l'image de la droite (AB) par la rotation $r$ de centre O, d'angle $\left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Établir que Q est commun aux droites (BC) et $\Delta$.
2. Soient A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1~;~-2)$, $(3~;~2)$, $(-1~;~2)$ et $(-3~;~-2)$, dans un plan orienté rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (on donnera les coordonnées des sommets de ce carré).

**PROBLÈME** **11 POINTS**

**I.** On munit le plan P d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ où l'unité est 5 cm. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

1. Besançon - Dijon - Grenoble - Lyon - Metz - Nancy - Reims - Strasbourg

1. Étudier les variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative $\Gamma$ de $f$ sur cet intervalle. (On précisera les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisse $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$).
2. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (a\cos x + b\sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

soit une primitive de $f$.
Calculer l'aire limitée par $\Gamma$, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, et l'axe des abscisses. Exprimer le résultat en cm$^2$.

**II.**. On se propose d'étudier l'intersection de la courbe $\Gamma$ avec la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

1. Existe-t-il des points d'intersection de $\Gamma$ et de $\Delta$ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ ?
2. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x - x.$$

   **a.** Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   **b.** Étudier les variations de $\varphi$.
   **c.** En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha$ de $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\mathrm{e}^{\alpha}\cos\alpha = \alpha$ (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$).
   **d.** On pose $\beta = f(1) = \mathrm{e}^{-1}\cos 1$.
   En prouvant d'abord que $\alpha < 1$, puis en utilisant le sens de variation de $f$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ montrer l'encadrement : .

$$\beta < \alpha < 1.$$

3. On considère la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 1$, et par la relation de récurrence, vérifiée pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

   **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n$,

$$\beta \leqslant u_n \leqslant 1.$$

   **b.** On pose $k = \left|f'(\beta)\right|$.
   En étudiant le signe de $f''$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ prouver que, sur cet intervalle :

$$f'(0) < f'(x) \leqslant f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

   En déduire que $k < 1$. Prouver que, pour tout réel $x$ de $[\beta\,;\,1]$ :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant k.$$

   **c.** Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|.$$

   **d.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$ quand $n$ tend vers $+\infty$.