

## ☞ Baccalauréat C Métropole groupe III<sup>1</sup> juin 1989 ☞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan complexe ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
On notera A le point d'affixe  $-1 + 2i$  et B le point d'affixe  $2 - i$ .

1. Déterminer et représenter dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) l'ensemble ( $E_1$ ) des points  $M$  de ( $\mathcal{P}$ ) d'affixe  $z = x + iy$  tels que :

$$z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$$

où  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ .

Vérifier que A et B appartiennent à ( $E_1$ ).

2. Déterminer et représenter dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) l'ensemble ( $E_2$ ) des points  $M$  de ( $\mathcal{P}$ ) d'affixe  $z = x + iy$  tels que :

$$[z - (1 + i)] [\bar{z} - (1 - i)] = 5.$$

Vérifier que A et B appartiennent à ( $E_2$ ).

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que  $AB = AC$ . On note I le milieu de [BC] et on donne  $AI = 4a$  et  $BC = 2a$ , où  $a$  est un réel strictement positif; l'unité de longueur dans le plan étant le centimètre, on prendra  $a = 2$  pour la figure demandée au 1.

On note G le barycentre du système  $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$ .

1. En utilisant le point G, déterminer l'ensemble (E) des points  $M$  du plan tels que

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|.$$

Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et l'ensemble (E).

2.  $k$  étant un nombre réel déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2$ .

On discutera suivant les valeurs de  $k$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

#### A

On considère dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , le cercle ( $\Gamma$ ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées  $(1; 0)$  et A' le point de coordonnées  $(-1; 0)$ .

1. Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire (A) à la droite (AA'). La droite ( $\Delta$ ) coupe le cercle ( $\Gamma$ ) en M et M'. On pose  $OH = x$ . Calculer en fonction de  $x$  l'aire du triangle AMM'.

---

1. Lille, Amiens, Rouen

2. Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[-1; +1]$  par

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

et soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

- a. Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et  $+1$ . En déduire les tangentes à la courbe  $(\mathcal{C})$  aux points d'abscisses  $-1$  et  $+1$ .
  - b. Dresser le tableau de variations de  $f$ ; on y précisera  $f(0)$ .
  - c. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .
3. Montrer que le triangle  $AMM'$  d'aire maximale est équilatéral.
  4. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Déterminer  $\beta$  et donner, en justifiant, une valeur décimale approchée par défaut à  $10^{-3}$  près de  $\alpha$ .

### B

Cette partie propose l'étude des intégrales  $I_n$  définies pour  $n$  entier naturel non nul par

$$I_n = \int_0^1 (1-x^n)\sqrt{1-x^2} dx.$$

On pose  $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  et, pour  $n$  entier naturel non nul :

$$J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx.$$

1. En utilisant des considérations d'aire, prouver que  $J_0 = \frac{\pi}{4}$ .
2.
  - a. Calculer  $J_1$
  - b. En déduire la valeur de  $I_1$  et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.
3.
  - a. Étudier le sens de variation de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - b. En déduire que les suites  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent.
4.
  - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

- b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

### C

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

1.
  - a. Démontrer que la fonction  $v$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

a pour fonction dérivée sur  $[0; 1]$ ,  $v'$  telle que  $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ . On admet que le résultat reste vrai sur  $[0; 1]$ .

- b.** À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir la fonction  $\nu$ , démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a

$$(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}.$$

Vérifier que cette formule reste encore valable pour  $n = 2$ .

- 2.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $p$  entier naturel non nul, on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \cdots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2p+3)}.$$