

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Métropole groupe III juin 1987¹ œ

EXERCICE 1

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $F(0; 1; 0)$.

1. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{MA} \wedge \vec{MB}$. Déterminer le point M_0 tel que $\vec{M_0A} \wedge \vec{M_0B} = \vec{M_0F}$
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) tels que

$$\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\| = \|\vec{MF}\|.$$

En interprétant $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|$ comme une aire, montrer que ces points M sont à égale distance du point F et de la droite (AB) . En déduire une solution géométrique.

3. Résoudre les mêmes questions qu'en 2. en remplaçant le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) par le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 2

4 points

On pose

$$I_0 = \int_0^e x dx.$$

$$\text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir la relation $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. Calculer I_2 .
3. Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante.
En déduire, en utilisant la relation de récurrence du 2., l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

PROBLÈME

12 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, M, N et Q d'affixes respectives $1, -1, z, z^2, \frac{1}{z}$, où z est un nombre complexe non nul. On rappelle que si M a pour affixe z , l'argument de z , noté $\arg z$ est une mesure en radians de l'angle (\vec{OA}, \vec{OAM}) .

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon
Nancy, Metz, Reims, Strasbourg

Question préliminaire : pour $z \neq 0$, calculer en fonction de z l'affixe de l'isobarycentre G des points : M , N et Q .

La partie A est l'étude de la fonction ainsi obtenue dans le champ réel; l'objet de la partie B est la construction du lieu de l'isobarycentre G lorsque le point M décrit le cercle trigonométrique.

Les parties A et B peuvent être résolues indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$$

et

$$x \longmapsto g(x) = 2x^3 + x^2 - 1.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
2. Étudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α , avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α .)
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f . On désigne par (\mathcal{C}) la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de (\mathcal{C}) d'abscisse -1 et par J le point de (\mathcal{C}) d'abscisse $+1$.
4.
 - a. Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à (\mathcal{C}) .
 - b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (\mathcal{C}) .
5. Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (T).
6. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (\mathcal{C}) . (On prendra $2/3$ comme valeur approchée de α .)

Partie B

Dans cette partie, on reprend les notations du début du problème avec $z = e^{it}$ et $t \in \mathbb{R}$. Les figures seront tracées dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant pour unité 9 cm.

1. Soit S le point d'affixe $Z = z^2 + z + \frac{1}{z}$. Montrer que les points B, M et S sont alignés.
2. Calculer en fonction de t l'affixe de l'isobarycentre de M , N et Q . On en précisera la partie réelle et la partie imaginaire.
3. Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point G_t de coordonnées $(x(t); y(t))$ où

$$x(t) = -(\cos 2t + 2 \cos t), \quad y(t) = -\sin 2t.$$

Pour tout t réel, comparer $G_{t+2\pi}$ et G_t , puis G_{-t} et G_t .

4. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Tracer la courbe (Γ) , ensemble des points G_t pour $t \in [0; \pi]$. En particulier, on aura soin de préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées. (On rappelle que l'unité est 9 cm.)
6. On considère le cercle centré à l'origine et de rayon $\frac{1}{3}$.
Pour $t \in [0; \pi]$, soit M'_t le point d'intersection, autre que G_π , de ce cercle et de la droite $(G_t G_\pi)$.
Utiliser la question B 1. pour donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OM'_t})$.
7. Compléter la courbe (Γ) pour obtenir le lieu géométrique de l'isobarycentre des points M , N et Q lorsque M décrit le cercle trigonométrique.