∽ Baccalauréat C Groupe III. Paris–Créteil–Versailles ∾ juin 1990

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Dans le plan orienté on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I.

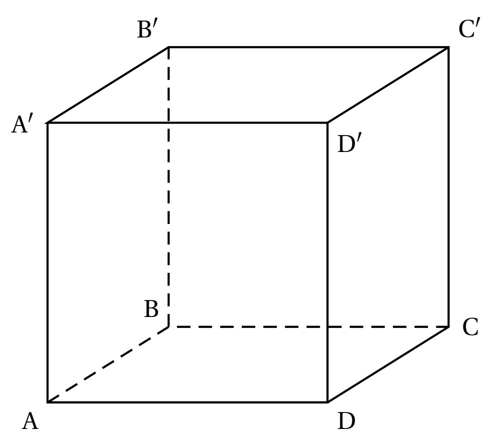
I.

1. Soit $\text{OJO}'\text{G}$ le carré direct de centre I c'est-à-dire que $\left(\overrightarrow{\text{OI}},\ \overrightarrow{\text{OG}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\Big)$. Placer ces différents points sur une figure (on prendra OI = 4 cm).
2. Prouver que $s \circ r$ est la rotation de centre J d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
3. En déduire que J est le seul point du plan tel que $r(\text{J}) = s(\text{J})$.
   Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note,
   A et B les images de M par r et s ;
   C et D les images de N par r et s.

II. Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment [MN]. Démontrer que ABCD est un carré de centre G. Placer M et N et le carré ABCD sur la figure.

III. Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré. Prouver que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD (on introduira le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré ; on comparera alors $r(\text{J}')$ et $s(\text{J}')$.
Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouver que $r' \circ r = s$. En déduire que sous les hypothèses de la question II, le carré ABCD est direct (c'est-à-dire que $r'(\text{A}) = \text{B}$).

EXERCICE 2 **4 POINTS**



$\text{ABCDA}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'$ est un cube (voir figure). On note,
s_1 la réflexion de plan $(\text{AA}'\text{BB}')$;
s_2 la réflexion de plan $(\text{BB}'\text{CC})$;
s_3 la réflexion de plan (CCDD') ;
s_4 la réflexion de plan $(\text{DD}'\text{AA}')$.

I.

1. Montrer que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.
2. Déterminer de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

II.

1. On note s la réflexion de plan (BB′ DD′).
Déterminer les réflexions s' et s'' telles que, $r' = s \circ s'$ et $r" = s_4 \circ s_3$.
2. En déduire que $t = r'' \circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\text{BD}}$.

Problème **11 points**

Partie A.

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

I. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

II.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$

Étudier les variations de φ. Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule, et que $0,27 \leqslant \beta \leqslant 0,28$. (On ne demande pas de construire la courbe représentative de φ.)

2. Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f.

III. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

IV. Construire les courbes représentatives $\mathcal{C}$ de f et Γ de $x \longmapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ [unité graphique 4 cm].

Partie B.

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$

À cet effet on introduit la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \text{e} \cdot \text{e}^{\frac{1}{x}}.$$

I. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $3,5 \leqslant \alpha \leqslant 3,7$. Placer le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.

II.

1. Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2. Étudier la monotonie de g.
3. Prouver que pour tout élément x de $[3,5~;~3,7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3,5~;~3,7]$.

4. Établir que pour tout élément x de [3,5 ; 3,7]

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \left|g'(3,5)\right| \leqslant \frac{1}{3}$$

En déduire que

$$|g(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x-\alpha|.$$

III. Soit (u_n) la suite d'éléments de [3,5 ; 3,7] définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 3,5$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$

$$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^n}$$

En déduire la limite de (u_n).

2. Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$, où n est un entier naturel non nul.

I. Montrer que, pour tout n, cette équation admet une solution α_n et une seule (en particulier, $\alpha_1 = \alpha$).

II. Comparaison de α_n à e^n.

1. Établir que $f(\text{e}^n) \leqslant n$. En déduire que $\alpha_n \geqslant \text{e}^n$.

2. Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{\text{e}^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad (1)$$

3. En déduire, à l'aide de 1., la limite de $\dfrac{\alpha_n}{\text{e}^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

III. Comparaison de α_n à $\text{e}^n + n$.
On écrit α_n sous la forme

$$\alpha_n = \text{e}^n(1+\epsilon_n) \quad \text{où } \epsilon_n \geqslant 0 \quad (2)$$

1. À l'aide de (1), exprimer $(1+\epsilon_n)\ln(1+\epsilon_n)$ en fonction de n.

2. Établir que pour tout $t \geqslant 0$

$$0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

3. Déduire de (1) et (2) que pour tout $n \geqslant 1$

$$\epsilon_n \leqslant n\text{e}^{-n} \leqslant \epsilon_n + \frac{\epsilon_n^2}{2},$$

puis que

$$0 \leqslant n\text{e}^{-n} - \epsilon_n \leqslant \frac{n^2}{2}\text{e}^{-2n} \quad (3)$$

4. À l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $\text{e}^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.