Baccalauréat C Métropole groupe II [1] juin 1988

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.
2. a. Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.

   b. Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à 6 questions.
3. Quelle est la probabilité que la candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. Soit A un point de P d'affixe a non nulle et soit ABC le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O, de rayon OA et tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Déterminer, en fonction de a, les affixes b et c des points B et C respectivement.
2. On désigne par M le point d'affixe $z = a^3$.
   Déterminer a pour que M soit le milieu de [BC].
3. Dans cette question, le point A décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
   Déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère ABNC soit un losange.

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A

Dans cette partie, on étudie la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{x\text{e}^{2x}}.$$

1. a. Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction h telle que :

$$h(x) = \text{e}^x - x - 1.$$

   b. En déduire que, pour tout réel α,

$$\text{e}^{\alpha} > \alpha + 1 \quad (1)$$

2. a. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\text{e}^{-2x} \leqslant g(x).$$

1. Caen, Bordeaux, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

b. Justifier l'écriture : $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

En déduire à l'aide de l'inégalité (1), que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

c. Déduire des questions précédentes que la fonction g est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

3. a. Calculer la dérivée g' de g.

b. En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour tout $x > 0$,

$$g'(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2x}.$$

En déduire le sens de variations de la fonction g.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & g(x), \quad \text{pour } x > 0. \end{array}\right.$$

1. a. Justifier l'écriture, pour $x > 0$,

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{x}.$$

b. Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Étudier le sens de variation de u.

c. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout réel t, tel que $0 \leqslant t \leqslant a$:

$$2 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}.$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction u sur l'intervalle $[0~;~a]$, démontrer que :

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}}{a} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}}{2}. \qquad (2)$$

d. En déduire, à l'aide des inégalités (2), que pour tout $x > 0$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}.$$

En utilisant les inégalités (3), étudier la limite de $\dfrac{g(x)-1}{x}$ quand x tend vers 0. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 0$.

2. a. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans le plan P muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 5 cm).

3. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan P délimitée par $(\mathscr{C})$, les axes du repère et la droite D d'équation $x = 1$.
On se propose de déterminer les encadrements de l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$, exprimée en cm^2.

a. Donner un encadrement de $\mathscr{A}$ à l'aide de rectangles en partageant l'intervalle $[0 ; 1]$ en cinq intervalles de même longueur.

b. En utilisant les inégalités (3), donner un encadrement de $\mathscr{A}$.