Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit I le milieu du segment BC.
On note R_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$.
On se propose de trouver par *deux méthodes* la nature et les éléments caractéristiques de la transformation :

$$\text{S} = \text{R}_\text{C} \circ \text{T} \circ \text{R}_\text{B}.$$

1re méthode : Utilisation des nombres complexes

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

1. Donner l'écriture complexe des transformations R_B, R_C, T puis S.
2. Caractériser alors S.

2e méthode : Utilisation des propriétés des transformations

1. Déterminer, sans calcul, la nature de S.
2. Préciser l'image de B par S.
3. Caractériser S.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté on donne un point O et une droite orientée D passant par O. Soit D$'$ la droite orientée se déduisant de D par le quart de tour direct de centre O.
Soit I un point du plan n'appartenant ni à D ni à D$'$, H et H$'$ les projections orthogonales de I respectivement sur D et D'.
On supposera I choisi de telle sorte que $\overline{\text{OH}} > 0$ et $\overline{\text{OH}'} > 0$.
Les figures demandées seront réalisées en choisissant OH = 4 cm et OH$'$ = 2 cm.
À chaque point M de D distinct de O on associe le cercle C_M passant par 0, 1 et M.

1. **a.** Si M est en O on convient que C_O est le cercle tangent en O à D et passant par I. Préciser le centre de C_O et placer ce cercle sur la figure.

   b. Montrer qu'il existe un point A de D et un seul tel que le cercle C_A soit tangent à D$'$. Préciser le centre de C_A et placer ce cercle sur la figure.

   Le cercle C_M s'il n'est pas tangent à D$'$, recoupe cette droite en un point M$'$ autre que O (en particulier C_O recoupe D$'$ en un point O$'$).

   Si M est en A, on convient que A$'$ = O.

   On se propose d'étudier la transformation qui à tout point M de D associe M'.
2. Soit s l'unique similitude directe du plan associant O à O$'$ et A à A$'$ = O. On précise que O a pour image O$'$ et que A a pour image O.

1. Orléans - Tours, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Rennes

a. Montrer que l'angle de s admet pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer le centre de cette similitude (on établira qu'il appartient à C_{O} et C_{A}).

c. Déterminer l'image de H par s et en déduire le rapport de s.

3. Prouver que pour tout point M de D,

$$s(M) = M'.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln x\right)$$

et de construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$, ce qui fait l'objet de la partie A., puis de décrire un procédé d'approximation du nombre a pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie B.

A. Étude de f et construction de C

1. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction numérique définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + \ln x - 2$$

a. Étudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de g.)

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que :

$$1,30 \leqslant a \leqslant 1,35.$$

c. Étudier le signe de $g(x)$.

2. *Étude de f*

a. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

b. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f.

3. *Construction de la courbe $\mathscr{C}$*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On choisit pour unité graphique 2 cm.

a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déterminer le point d'intersection B de $\mathscr{C}$ et Δ ; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

c. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, en précisant la tangente en B à $\mathscr{C}$.

4. *Calcul d'une aire*

Pour tout nombre réel $t \geqslant \text{e}$, calculer l'aire $\mathscr{A}(t)$ de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$ et Δ et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = t$.

B. Approximation de α

1. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur I = [1,30 ; 1,35] par :

$$h(x) = \sqrt{2 - \ln x}.$$

   b. Justifier la décroissance de h sur I et montrer que pour tout élément x de I, $h(x)$ appartient à I.

   c. Prouver que, pour tout élément x de I,

$$-\frac{1}{3} \leqslant h'(x) \leqslant 0.$$

   d. En déduire que pour tout élément x de I,

$$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x - \alpha|.$$

2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1,30$.

   a. Montrer que pour tout entier n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|.$$

   b. En déduire que pour tout entier n

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d. Préciser un entier n_0 tel que $\left|u_{n_0} - \alpha\right| \leqslant 10^{-6}$ et donner la valeur de u_{n_0}.