Baccalauréat C Métropole groupe IV [1] 1987

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. La lettre x désigne un nombre réel, linéariser $\sin^6 x$.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $I = \dfrac{15\pi - 44}{1\,152}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On donne dans l'espace, quatre points A, B, C, D non coplanaires.
I est le milieu de [AB], J le milieu de [CD], G est le milieu de [IJ].

1. Peut-on avoir I = J ? Existe-t-il des points de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\,? \quad \text{(Justifier les réponses.)}$$

2. Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$

3. Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

4. Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère la courbe (Γ_m) d'équation :

$$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1),$$

où m désigne un nombre réel donné.

1. Vérifier que le point A(3 ; 0) appartient à la courbe (Γ_m), quel que soit le réel m.
2. Dans cette question, on suppose m non nul.
   a. Montrer que la courbe (Γ_m) est une conique à centre. Montrer que le centre I_m de (Γ_m) a pour couple de coordonnées $\left(\dfrac{(m-1)}{2m}\,;\,0\right)$.
   Préciser suivant la valeur de m, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.
   b. Construire les courbes (Γ_{-1}) et (Γ_1) (figure 1).
3. Soit $(a\,;\,b)$ un couple de nombres complexes. T est la transformation du plan (P), qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par
   $z' = az + b$.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

a. Déterminer a et b pour que le point A(3 ; 0) ait pour image par T le point A$'$(3 ; -3) et que le point B(-3 ; 0) ait pour image par T le point B$'$(-3 ; 3).

Préciser alors la nature de T et ses éléments caractéristiques.

b. Justifier que $\left(\Gamma'_{-1}\right)$ transformée de (Γ_{-1}) par T , est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et $y$du point M, puis x et y en fonction de x' et y'.

d. En déduire une équation de $\left(\Gamma'_1\right)$ transformée de (Γ_1) par T . Construire la courbe $\left(\Gamma'_1\right)$ (sur la figure 1).

4. **a.** On se donne la droite (D) d'équation $y = 5x - 21$. (D') est l'ensemble transformé de (D) par T.

Déterminer une équation de (D').

b. U et V (U d'ordonnée positive) sont les points communs à (Γ_1) et (D), et U' et V' leurs images par T.

Déterminer les couples de coordonnées des points U, V, U' et V'.

c. Soit S la surface limitée par la courbe (Γ_1) et le segment $[UV]$. Hachurer sur la figure 1 la surface S et son image S'.

Calculer l'aire de S' donnée par :

$$\mathscr{A}\left(S'\right) = \int_{\frac{3}{2}}^{9} \left[-\frac{9}{x} - \left(\frac{2}{3}x - 7\right)\right]\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire de S.

5. Dans cette question, on étudie le cas où $m = 0$.

a. Quelle est la nature de la courbe (Γ_0) ?

Faire une deuxième figure, représentant la courbe (Γ_0) (figure 2).

b. On appelle G le barycentre de la famille $\{(\text{A}, 2),\ (\text{b}, 1),\ (M, 1)\}$.

M décrit (Γ_0). On appelle $\left(\gamma_0\right)$ la courbe alors décrite par G.

Démontrer que $\left(\gamma_0\right)$ est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre I_{-1} (1 ; 0), dont on précisera le rapport.

On appelle M_1 et M_2 les points de (Γ_0) d ?abscisses respectives 4 et 7, dont les ordonnées sont positives.

Construire les barycentres G_1 et G_2 correspondants.

c. On appelle $\left(\Gamma'_0\right)$ l'image par T de (Γ_0).

On appelle $\left(\gamma'_0\right)$ l'image par T de $\left(\gamma_0\right)$.

Démontrer que $\left(\gamma'_0\right)$ est l'image de $\left(\Gamma'_0\right)$ par une homothétie que l'on précisera.

Construire les images par T des points M_1, M_2, G_1, G_2, et les courbes $\left(\Gamma'_0\right)$ et $\left(\gamma'_0\right)$.

N.B.- L'usage des instruments de calcul est interdit pour cette épreuve