Baccalauréat C Métropole groupe I[1] juin 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On donne les points :

$$A(4 ; -1) \quad ; \quad B\left(1+\sqrt{3} \quad ; \quad 2+\sqrt{3}\right) \quad ; \quad C\left(2-2\sqrt{2} ; 1\right) \quad ; \quad D(0 ; -1).$$

Placer ces points en prenant 1,7 comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ et 1,4 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.
On désigne par $a,\ b,\ c,\ d$ les affixes respectives des points A, B, C, D.

1. Montrer que :

$$\frac{a-c}{d-c} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(1+\mathrm{i}).$$

On admettra que $\dfrac{a-b}{d-b} = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

2. Déduire de ces résultats les mesures respectives des angles $\left(\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{BA}\right)$.
Montrer que les points A, B, C, D sont sur un cercle $(\mathscr{C})$.
Construire son centre Ω puis dessiner $(\mathscr{C})$.

3. On considère la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Quelle est l'image de D par cette rotation ?
En écrivant l'expression complexe de cette rotation trouver l'affixe de Ω.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

FGH est un triangle équilatéral de côté de longueur ℓ.
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d'excentricité 2.

1. Déterminer les sommets S et S′ de cette hyperbole (on remarquera que S et S′ sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F′.
Calculer, en fonction de ℓ, la distance des sommets $2a$ et la distance des deux foyers $2c$.

2. On choisit le repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où O est le centre de l'hyperbole et $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire de la demi-droite [OF). Écrire une équation de $(\mathscr{H})$. Donner l'allure de $(\mathscr{H})$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le graphique ci-joint donne les courbes représentatives de quelques solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 8x^2 - 8x$$

dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Aix-Marseille, Montpellier, Corse, Nice, Toulouse

A.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (1)
2. Déterminer un polynôme du second degré $P(x)$ solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 8x^2 - 8x$ (2)
3. Démontrer que les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = k\mathrm{e}^{2x} - 4x^2,$$

où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (2).

B. Étude de certaines fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = k\mathrm{e}^{2x} - 4x^2.$$

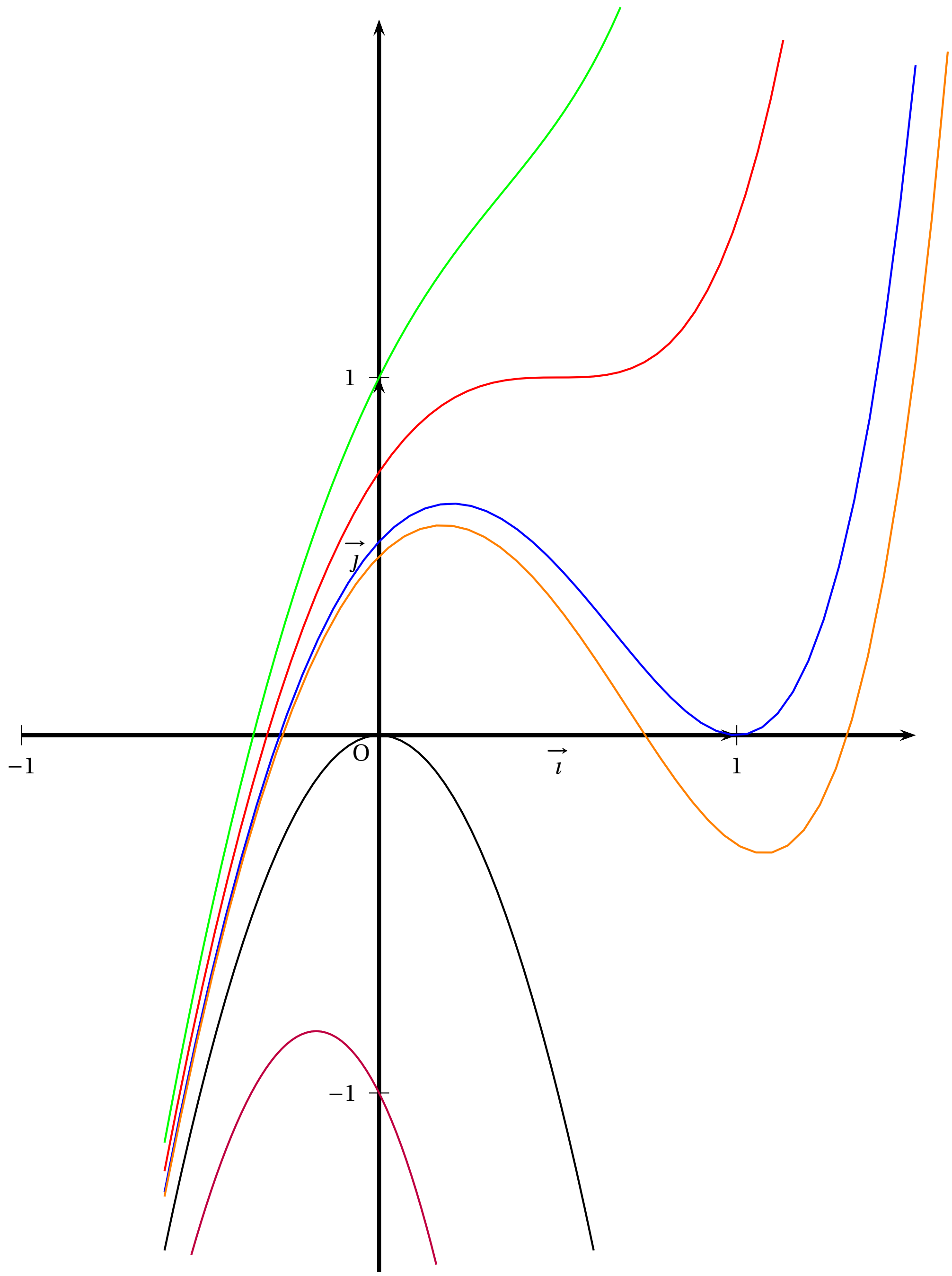
$\mathscr{C}_k$ désigne la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On pose $k_1 = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$ et $k_2 = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

1. Dans cette question k est un réel strictement positif.
   Chercher $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_k(x)$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans $f_k(x)$) et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f_k(x)$.
2. Calculer $f_k(x)$ et $f''(x)$; étudier pour $k = k_1$ et pour $k = k_2$, le signe de $f''(x)$ et le sens de variation de $f'(x)$.
3. **a.** Démontrer que l'équation $f_{k_1}(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont une évidente. On appelle α l'autre solution.
   Donner un encadrement décimal d'amplitude 10^{-3} de α.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'_{k_2}(x) = 0$.
4. Déterminer le sens de variation respectivement de f_{k_1} et de f_{k_2} (on ne demande pas ici le calcul de $f_{k_1}(\alpha)$). Donner les tableaux de variation de f_{k_1} et de f_{k_2}.
   Indiquer, sur le graphique joint, les courbes $\mathscr{C}_0$ (correspondant à $k = 0$) ; $\mathscr{C}_{k_1}$; $\mathscr{C}_{k_2}$.
5. Calculer la valeur moyenne de f_k sur l'intervalle $\left[0\,;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

C. Étude des points de $\mathscr{C}_k$ à tangente parallèle à $(x'x)$.

1. On s'intéresse aux points, lorsqu'ils existent, des courbes $\mathscr{C}_k$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_k$ est parallèle à $(x'x)$.
   Montrer que ces points appartiennent à la parabole (P) d'équation $y = -4x^2 + 4x$.
   Tracer (P) sur le graphique joint.
2. Déduire de l'encadrement de α, obtenu en B. 3., un encadrement de $f_{k_1}(\alpha)$. Donner une valeur approchée de $f_{k_1}(\alpha)$ à 10^{-2} près.


1
$\vec{j}$
O
$\vec{\imath}$
-1
1
-1