Baccalauréat C Métropole groupe I [1] juin 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On considère le cercle C de centre O et de rayon a et le cercle C$'$ de centre O et de rayon b, où a et b sont des nombres réels donnés tels que $0 < b < a$.
On note D et D$'$ les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Pour tout nombre réel θ, on note P le point du cercle C tel que θ soit une mesure (en radians) de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath},~\overrightarrow{\text{OP}}}\right)$ et P$'$ le point d'intersection de C$'$ avec la demi-droite Δ d'origine O passant par P.
Soit enfin M le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D$'$ et de la droite passant par P$'$ parallèle à D.

1. Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de θ.
   En déduire la nature de l'ensemble E décrit par M lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer un vecteur directeur de la tangente T à la courbe E au point M.

   b. Soit N le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D et de la droite passant par P$'$ parallèle à D$'$.
   Prouver que T est orthogonale à la droite (ON).
   En déduire une construction géométrique de T.
3. On prend $a = 6$ et $b = 3$. Construire sur une même figure les cercles C et C$'$, les droites D et D$'$ et l'ensemble E.
   On placera sur cette figure les points P, P$'$, M et N correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, et la tangente T en M à E (on prendra 1 cm pour unité graphique).

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un plan P de l'espace, on considère un cercle C de diamètre [AB]. Soit Δ la droite passant par A orthogonale à P et S un point de Δ distinct de A.
On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS).
Pour tout point M du cercle C on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1. Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.
2. Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre [AS].
3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.
   Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).
   En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).
4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I orthogonal à la droite (BS).
5. **a.** Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π.

   b. Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt C est égal à Γ. À cet effet, étant donné un point N$'$ de Γ distinct de A, on pourra montrer que le plan (AN$'$S) coupe le cercle C en A et en un autre point M.

1. Paris - Créteil - Versailles

PROBLÈME **11 POINTS**

A L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ unité graphique : 2 cm.

1. *Encadrement de* $\ln(1+x)$.

a. Prouver que, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1.$$

b. En intégrant ces inégalités, établir que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x. \qquad (1)$$

2. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$$

a. Montrer que g est dérivable et calculer g'.

b. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{x^2}{4}$$

(pour majorer $g'(x)$, on minorera $(1+x)(2+x)^2$).

c. En déduire que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^3}{12} \qquad (2)$$

3. *Variations de la fonction* f

a. Montrer que f est dérivable sur $]0~;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Établir que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$g(x) \leqslant \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

Grâce à (2), en déduire le sens de variation de f.

4. *Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition*

a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Prouver que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

À cet effet, on notera que (2) fournit un encadrement de $\ln(1+x)$ et on en déduira un encadrement de $x - \ln(1+x)$.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et, grâce à (1), préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

5. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.

B L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels définie par les relations :

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \text{ et} u_0 = c,$$

où c est un nombre réel strictement positif donné.

1. *Convergence de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$

a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

b. Montrer que cette suite converge.
Établir que sa limite ℓ est nulle (on pourra utiliser les variations de f).

c. On prend $c = 1$. À l'aide de la calculatrice, obtenir des valeurs approchées de u_{10}, u_{50} et u_{100}.
Que peut-on conjecturer pour la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. *Encadrement de* (u_n)

À partir de cette question, on prend $c = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose
$v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n. En déduire, à l'aide de (3), la limite de $v_{n+1} - v_n$.

b. Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,1]$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leqslant \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}.$$

À cet effet, on pourra utiliser (2) en établissant d'abord que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leqslant \frac{(2+x)^2}{4x^2}g(x).$$

c. En déduire que , pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2} \qquad (4)$$

puis que :

$$\frac{1}{4} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2} \qquad (5)$$

d. En effectuant la somme des inégalités (5), encadrer $v_n - v_0$.
En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\frac{2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n+4} \qquad (6)$$

e. Déterminer enfin la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$. À cet effet, on établira la majoration :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+3} \leqslant \ln(n+3)$$

et on encadrera $v_n - v_0$ grâce à (4).