Baccalauréat ES Métropole groupe I bis juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dette des pays du Tiers Monde entre 1978 et 1992 (en milliards de dollars).

Année	1978	1982	1986	1990	1992
Rang de l'année (x_i)	0	4	8	12	14
Dette $\left(y_i\right)$	383	753	1 089	1 346	1 510

Source : Banque mondiale, FMI, 1993

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
   Les unités graphiques sont : 1 cm pour 2 ans, en abscisse 1 cm pour 100 milliards de dollars, en ordonnées.
   Représenter le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$, et le point moyen, M, de cette série.
2. Aucun calcul manuel n'est demandé.
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série double (on donnera le résultat à 10^{-3} près). Un ajustement affine peut-il être envisagé ? Pourquoi ?
   b. Écrire une équation de la droite de régression D de y en x, par la méthode des moindres carrés (les coefficients de l'équation seront donnés sous forme décimale approchée à 10^{-1} près par défaut). Tracer D.
   c. Estimer, à 1 milliard de dollars près, le montant prévisible de la dette des pays du Tiers Monde en 2000.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Étude préliminaire

On donne la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation de! Dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que :

$$\text{si } 0 < x < \frac{1}{10}, \quad \text{alors } 0 < f(x) < 1.$$

Achat d'essence

1. **a.** Le prix d'un litre d'essence est p (p est exprimé en francs). Quel est le volume V_1 du carburant acheté pour 100 F ?
   b. Le prix du litre d'essence a augmenté de 25 % par rapport à p. Quel est le volume V_2 du carburant acheté pour 100 F ?
   c. Calculer V_2, et vérifier que le pourcentage de diminution de V_1 volume du carburant acheté est 20 %.
2. Plus généralement, démontrer que si le prix augmente de t %, alors le volume baisse de n % avec :

$$n = \frac{100t}{100+t}$$

   On pose $x = \dfrac{t}{100}$ et $y = \dfrac{n}{100}$. Exprimer y en fonction de x.

3. On suppose que l'augmentation du prix du litre de carburant est inférieure à 10 %, c'est-à-dire que $0 < x < 0,1$.

   A-t-on raison de dire que la diminution de volume de carburant acheté, en résultant, est inférieure à 10 % ?

   Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Cinq amis nommés A, B, C, D, E achètent en commun une photocopieuse.
Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée seulement chez A ou chez B.
On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun des cinq amis émet un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B. Ces choix ont supposés équiprobables.
Par exemple, le résultat d'un vote noté (A, B, B, A, A) signifie que : A a voté pour A ; B a voté pour B ; C a voté pour B ; D a voté pour A ; E a voté pour A.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

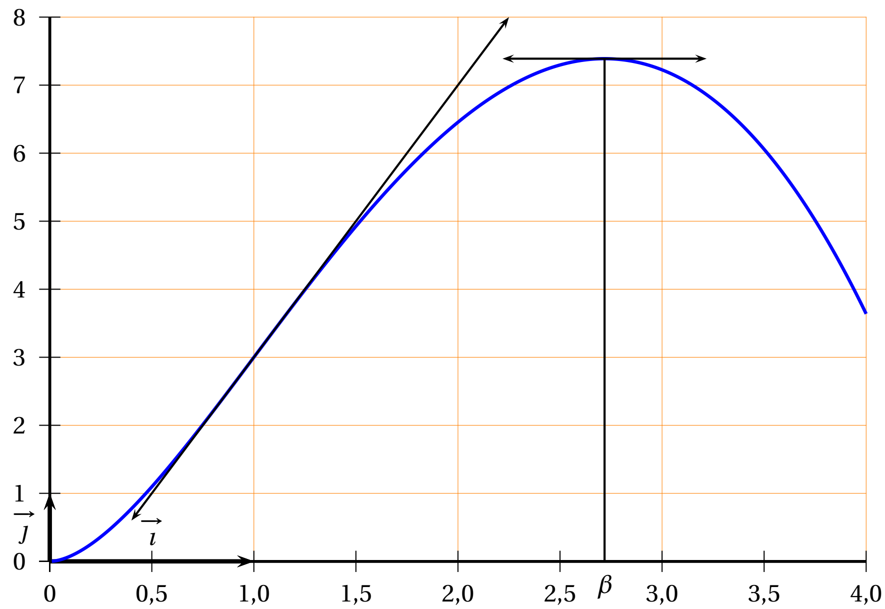
1. Quel nombre de résultats différents peut-on concevoir ?
2. On considère la variable aléatoire X qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A lors de ce vote.
   a. Établir la loi de probabilité de X.
   b. Vérifier que la probabilité p_1 pour que la photocopieuse soit entreposée chez A est égale à $\frac{1}{2}$.
3. À chaque début d'année, on effectue un vote, dans les mêmes conditions. On suppose que les votes sont des événements indépendants.
   Calculer la probabilité p_2 pour que A soit choisi pendant trois années consécutives.
4. C a libéré de la place dans son logement, et peut maintenant aussi entreposer la photocopieuse. Le vote se déroule toujours de la même façon.
   a. Quel est le nombre de résultats possibles à l'issue de ce vote ?
   b. Quelle est la probabilité p_3 pour que C soit choisi avec exactement quatre voix ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
La courbe Ω (voir ci-dessous) est la représentation graphique sur l'intervalle $]0 ; 4]$ d'une fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(a + b\ln x),$$

où a et b désignent deux constantes réelles, et ln la fonction logarithme népérien.



Partie A

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. La courbe représentative de f passe par le point A(1 ; 3). Elle admet en A une tangente D de coefficient directeur 4.
   Montrer que $f(x) = x^2(3-2\ln x)$.
3. Déterminer une équation de la droite D.
4. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse β du point B de la courbe où la tangente à Ω est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[4~;~+\infty[$. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique sur l'intervalle $[4; 5]$ et donner une valeur approchée à $0,01$ près de cette solution.

Partie B

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3\,(11-6\ln x)\,.$$

2. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0, 1 près par excès, de l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Partie C

Une entreprise fabrique x milliers d'objets $(0 < x < 4)$. Le coût de fabrication de tous ces objets, en milliers de francs, est supposé égal à $f(x)$, où f désigne la fonction étudiée précédemment.
Le coût moyen de fabrication d'un objet est, en francs :

$$m(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Soit k le nombre d'objets pour lequel le coût moyen de fabrication est maximal.

1. Étudier les variations de la fonction m sur l'intervalle $]0\,;\,4[$.
2. En déduire la valeur exacte du nombre entier k.
3. Calculer le coût moyen maximal à 1 centime près.