

∞ Baccalauréat C Métropole groupe V juin 1989¹ ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = -jz + i, \quad \text{où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Montrer que f admet exactement un point invariant Ω , dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement f .
2. On définit dans \mathcal{P} la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} M_0 &= O \\ M_{n+1} &= f(M_n), \text{ pour tout } n. \end{cases}$$

- a. Construire Ω , M_0 , M_1 , M_2 .
- b. Pour tout entier n , on note z_n l'affixe de M_n et on pose

$$Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Déterminer un nombre complexe a tel que, pour tout entier n ,

$$Z_{n+1} = aZ_n.$$

Mettre a sous forme trigonométrique et déterminer un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$.

- c. Calculer Z_n puis z_n en fonction de n . Calculer z_{1989} et placer M_{1989} sur le dessin.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que ce carré est direct, c'est-à-dire que (\vec{AB}, \vec{AD}) a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A,

t la translation de vecteur \vec{AB} ,

h l'homothétie de centre C de rapport $\sqrt{3}$.

1.
 - a. Prouver que $r' = t \circ r$ est une rotation, dont on précisera l'angle.
 - b. Déterminer les images de A et B par r' .
En déduire le centre de r' .
2. On se propose d'étudier la transformation $f = r' \circ h$.
 - a. Montrer que f est une similitude dont on précisera l'angle et le rapport.
 - b. Soit I le centre de f . Déterminer l'image de C par f .
Prouver que $(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que $ID = \sqrt{3} IC$.
 - c. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\vec{MC}, \vec{MD}) = \frac{\pi}{2}$.
Donner une mesure de l'angle (\vec{CD}, \vec{CI}) . Placer I sur la figure.

1. Paris, Créteil, Versailles

- d. Prouver que l'ensemble Γ' des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon.
Construire Γ' .

PROBLÈME**10 POINTS****Partie A :**

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} \text{ si } t > 0, \text{ et } g(0) = 1.$$

1. a. Établir que g est continue en 0.
b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a. Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.
b. Prouver que pour tout $t > 0$, $1 + t \leq e^t$.
c. En déduire le signe de g' et le sens de variation de g (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).
3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0.
À cet effet on introduit la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}.$$

- a. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$, ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
- b. Prouver que pour tout $t > 0$:

$$0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6} \quad (1)$$

pour cela, on établira d'abord que $0 \leq h''(t) \leq t$, et on en déduira un encadrement de h' puis de h .

- c. Déduire de la relation (1) un encadrement de $\frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$.

Prouver finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

Partie B :

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} (e^{-x} - e^{-2x}) \text{ si } x > 0, \text{ et } f(0) = 1$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Prouver que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-2x} (2x + 1 - e^x(x + 1)).$$

- c. À partir de l'inégalité $1 + x \leq e^x$, établie au A. 2. b., montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 0$.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 2g(2x) - g(x) \quad (2)$$

où g est la fonction étudiée dans la partie A.

En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3. Construire la courbe représentative (\mathcal{C}) de f , le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 4 cm.

Partie C :

On étudie maintenant la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. a. Étudier le sens de variation de F .
- b. Établir que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
En déduire que pour tout $t > 0$, $0 \leq F(t) \leq 1$.
2. Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(x) dx.$$

- a. En utilisant la relation (2), prouver que pour tout $t > 0$:

$$F(t) = G(2t) - G(t).$$

- b. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$F(t) = \int_0^{2t} g(x) dx. \quad (3)$$

- c. Établir que pour tout $x > 1$:

$$0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}.$$

En déduire que pour tout $t > 1$:

$$0 \leq \ln 2 - F(t) \leq e^{-t}.$$

- d. Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.