

## TES Baccalauréat Métropole groupe I bis juin 1997

### Exercice 1

4 points

Le tableau suivant donne le total des prestations sociales reçues par les ménages en France de 1988 à 1992 :

Année	1988	1989	1990	1991	1992
Rang $x_i$ , de l'année	0	1	2	3	4
Total des prestations en milliards de francs : $y_i$	1 338	1 415	1 505	1 606	1 700

SOURCE : INSEE, Tableaux de l'économie française 1993- 1994.

**N.B.** - Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est demandé dans cet exercice.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$  : le plan est rapporté à un repère orthogonal.  
Les unités graphiques sont :  
2 cm par année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 milliards de francs sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 1 000 milliards.
2. a. Calculer à  $10^{-3}$  près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x_i ; y_i)$ .  
En déduire qu'un ajustement affine est justifié.  
b. Écrire une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés : on donnera les coefficients à  $10^{-1}$  près par défaut.  
Tracer cette droite sur le graphique de la question 1).  
c. Estimer le total des prestations sociales reçues par les ménages en 1997.
3. En supposant que la tendance ainsi constatée se maintienne, à partir de quelle année le total des prestations dépassera-t-il 2 200 milliards ?

### Exercice 2 (obligatoire)

5 points

Un groupe industriel possède deux usines, l'usine Alpha et l'usine Bêta.

L'usine Alpha emploie 30 % des salariés, l'usine Bêta 70 %. La répartition des salaires mensuels dans les deux usines est la suivante :

Salaire mensuel $x$ en francs	Pourcentage des salariés de l'usine	
	Alpha	Bêta
$4000 \leq s < 6000$	32	22
$6000 \leq s < 8000$	35	43
$8000 \leq s < 14000$	22	23
$14000 \leq s < 18000$	7	12
$18000 \leq s < 30000$	4	0

On choisit un au hasard parmi l'ensemble des salariés du groupe. On admet l'équiprobabilité des choix. On considère les événements suivants :

- $E$  « le salarié gagne au moins 8 000 F par mois » ;
- $A$  « le salarié travaille dans l'usine Alpha » ;
- $B$  « le salarié travaille dans l'usine Bêta ».

1. a. Calculer la probabilité de  $A$  puis celle de  $B$ .  
b. Calculer la probabilité qu'un salarié de l'usine Alpha gagne au moins 8 000 F par mois.  
Faire le même calcul pour un salarié de l'usine Bêta.  
c. Montrer que la probabilité de  $E$  est : 0,344.

2. On considère maintenant les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont les valeurs et les lois de probabilités sont données dans les tableaux suivants :

$x_i$	5	7	11	16	24
$P(X = x_i)$	0,32	0,35	0,22	0,07	0,04
$y_i$	5	7	11	16	
$P(Y = y_i)$	0,22	0,43	0,23	0,12	

- Calculer à  $10^{-2}$  près l'espérance mathématique et l'écart type de chacune des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
- Utiliser le résultat de a. pour comparer les salaires moyens dans les usines Alpha et Bêta. Comment interpréter alors le résultat sur les écarts-types?

### Exercice 2 (spécialité)

5 points

Une entreprise dispose de deux machines, appelées machine « a » et machine « b », pour fabriquer le même type de pièces.

Certaines des pièces produites sont écartées comme défectueuses :

- pour la machine « a » la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est 0,9;
- pour la machine « b » cette probabilité est 0,95.

La machine « a » fournit les deux tiers de la production, la machine « b » le tiers restant.

On notera  $p(E)$  la probabilité d'un évènement  $E$ ,  $p(E/F)$  la probabilité de  $E$  sachant que  $F$  est réalisé.

- On choisit une pièce au hasard, avec équiprobabilité des choix.
  - Calculer la probabilité des évènements suivants :  
 $A$  : « la pièce provient de la machine "a" » ;  
 $B$  : « la pièce provient de la machine "b" ».
  - Soit  $S$  l'évènement : « la pièce est sans défaut ».  
 Calculer  $p(S/A)$  et  $p(S/B)$ . En déduire que  $p(S) = \frac{11}{12}$ .
- On considère un échantillon de 7 pièces produites par l'entreprise et on admet que le choix des 7 pièces suit une loi binomiale.
  - Calculer la probabilité que l'échantillon ne comporte que des pièces sans défaut.
  - Calculer la probabilité que l'échantillon comporte exactement 6 pièces sans défaut.
  - En déduire la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses dans l'échantillon.  
 Les résultats de cette question 2) seront donnés à  $10^{-3}$  près.

### Problème

11 points

On considère les fonctions définies dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; le point O est placé à 5 cm du bord gauche de la feuille, et l'unité graphique est 3 cm.

Les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  sont appelées respectivement  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$ .

- Tracer la courbe  $\mathcal{P}$ .
- étude de la fonction  $f$ .
  - Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

- b.** Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on pourra écrire  $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$ ).

Donner une interprétation graphique de ce résultat pour la courbe  $\mathcal{C}$ .

- c.** On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Vérifier que :

$$f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}.$$

Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- d.** Tracer la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse 0.
- 3. a.** Déterminer les coordonnées des points communs à  $\mathcal{C}$  et à  $\mathcal{P}$ .
- b.** étudier le signe de  $f(x) - g(x)$ .  
En donner une interprétation graphique.
- 4.** Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  sur le même graphique que  $\mathcal{P}$ .

- 5.** Soit  $F$  la fonction définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = -e^{-x}(x^2 + 1).$$

- a.** Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$ .
- b.** Donner la valeur exacte de  $I = \int_0^1 f(x) dx$  puis une valeur décimale approchée à  $10^{-2}$  près.  
Quelle est l'interprétation géométrique de  $I$  ?