Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 2 [1] juin 1992

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté on considère un rectangle ABCD tel que :

$$\text{AB} = 1,\ \text{BC} = 2 \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

On appelle M le milieu du segment [BC].

1. Soit s la similitude directe telle que : $s(\text{A}) = \text{M}$ et $s(\text{B}) = \text{D}$. Déterminer le rapport et l'angle de s.
2. On se propose dans cette question de préciser la position du centre O de la similitude s.
   a. Les droites (AB) et (DM) se coupent en I.
   Démontrer que les points A, O, M et I sont cocycliques.
   En déduire que : BM = BO = BA.
   b. Démontrer que DM = DO.
   c. En déduire que O est le symétrique de M par rapport à la droite (BD).
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct tel que les affixes des points A, B et D sont respectivement 0, 1 et 2i.
   a. Déterminer l'expression complexe de s et l'affixe de O.
   b. Vérifier que O est bien le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que BM = BO et que les droites (OM) et (BD) sont orthogonales.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère dans le plan P un triangle AFB rectangle en A et on note θ la mesure en radians de l'angle B avec :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Soit M un point quelconque du plan, On trace par M les parallèles aux droites (AF) et (FB) qui rencontrent la droite (AB) respectivement en H et M$'$. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que MM$'$ = MF.

1. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si :
$$\frac{\text{MF}}{\text{MH}} = \frac{1}{\sin\theta}.$$
   En déduire que (Γ) est une conique dont on précisera la nature.
2. Dans cette question on prend FA = 6 avec le centimètre pour unité et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
   Après avoir construit le triangle AFB, représenter les sommets, les foyers et le centre de la conique (Γ).
   Achever ensuite la construction de (Γ).

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

PROBLÈME **11 points**

n étant un entier naturel non nul, on se propose d'étudier la famille des fonctions f_n, définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_n(x) &=& x^n(1-\ln x) \quad \text{si } x>0 \quad \text{et}\\ f_n(0) &=& 0. \end{array}\right.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la représentation graphique de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm).

I. Étude générale des fonctions f_n, ($n \in \mathbb{N}^*$)

1. **a.** Montrer que toute fonction f_n est continue en 0.
   b. Discuter selon les valeurs de n la dérivabilité de f_n en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   c. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
2. **a.** Étudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

   et préciser les valeurs de x pour lesquelles elle s'annule.
   b. En déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$ et montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.
3. **a.** Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
   b. Pour $n \geqslant 1$, déterminer en fonction de n, une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ en chacun des points d'abscisses 1 et e.
   c. En utilisant les résultats précédents, construire sur un même graphique les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_n)$.
4. Soit a un réel positif différent de 0 et de e. On considère les deux points
   $M \in (\mathscr{C}_n)$ et $M' \in (\mathscr{C}_{n+1})$ de même abscisse a.
   a. On trace :
      la droite $(\text{O}M')$,
      la droite passant par M et parallèle à l'axe des abscisses
      et la droite d'équation $x = 1$.
   Montrer que ces droites sont concourantes.
   b. Construire, en expliquant la construction, le point M' à partir du point M.

II. Étude de la suite des intégrales

$$\int_1^{\text{e}} \boldsymbol{f_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Pour tout n entier naturel non nul on pose :

$$I_n = \int_1^{\text{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Sans calculer cette intégrale étudier le sens des variations de la suite (I_n).
2. En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de n l'expression de I_n. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

III. Étude des solutions des équations $f_n(x) = 1$

Dans cette partie n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. On désigne par x_n le réel non nul tel que $f_n(x_n) = 0$.
   Montrer que $x_n \in [1\ ;\ \mathrm{e}[$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[x_n\ ;\ \mathrm{e}[$ l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique. On désignera par α_n cette solution.
3. Montrer que : $f_{n+1}(a_n) > 1$. En déduire que la suite (α_n) est croissante.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$.