Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 1 [1] juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Au point M d'affixe $z = x+\text{i}y$, où x et y sont réels, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2+2z$.

1. **a.** Calculer les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ du point M' en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ du point M.

   b. Montrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.
   Tracer (H).

2. Soit Ω le point d'affixe -1.
   Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $\text{O}MM'\Omega$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_{A} et R_{B} les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_{A} et R_{B}.

1. On considère la transformation $T = R_{\text{B}} \circ R_{\text{A}}^{-1}$.

   a. Construire le point C image du point A par T.

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

   c. En déduire la nature du quadrilatère $M_1M_2\text{CA}$.

2. On suppose que le point M décrit le cercle (Γ) de diamètre [AB].

   a. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 quand M décrit (Γ).

   b. Soient ω et ω_2 les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega\omega_2}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

   c. Déterminer l'ensemble décrit par le point I, milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit (Γ).

PROBLÈME **12 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

A -

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \text{e}^{-x}$$

   et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le sepère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   Établir le tableau de variations de f.

1. Amiens, Lille, Rouen, Créteil, Paris, Versailles

2. Soit T l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point N de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -x\\ y' & = & -2x+y \end{array}\right.$$

   a. Montrer que $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}$ et que le milieu P de $[MN]$ appartient à l'axe $\left(O~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

   b. Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty~;~0]$ par

$$g(x) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{x}$$

   et soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Montrer que l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par T est la courbe $\mathscr{C}_1$.

3. Établir le tableau de variations de g.
4. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ admettent pour asymptote la droite Δ d'équation
   $y = x - \dfrac{1}{2}$ et préciser leur position par rapport à Δ.
5. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-x}$$

   et soit Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Montrer que Γ est la réunion de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}_1$.
6. En adoptant une unité de 4 cm sur chaque axe, construire Δ et la courbe Γ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ en précisant les demi-tangentes a Γ au point A d'abscisse 0.

B - Soit D_k la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{k}$ où k est un réel strictement supérieur à 1.

1. **a.** Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D_k et donner l'abscisse de leur point commun M_k.

   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et D_k et donner l'abscisse de leur point commun N_k.

   c. Vérifier que $N_k = T\left(M_k\right)$ (T étant l'application définie au A - 2.) et que le milieu P_k de $\left[M_kN_k\right]$ appartient à l'axe $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Démontrer que les parties du plan limitées, l'une par $\mathscr{C}$, D_k et $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$, l'autre par $\mathscr{C}_1$, D_k et $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\jmath}\right)$, ont la même aire $a(k)$.
   Étudier la limite de $a(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'aire du triangle APM_k est $S(k) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\ln k$.
4. On se propose d'étudier s'il existe une valeur de k telle que $S(k) = 2a(k)$. (1)

   a. ψ étant la fonction numérique définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

$$\psi(k) = \ln k - 4\frac{k-1}{k+3},$$

   montrer que l'égalité (1) équivaut à : $\psi(k) = 0$.

   b. Établir le tableau de variations de ψ.

   c. En déduire l'existence et l'unicité de la valeur de k vérifiant l'égalité (1) et encadrer cette valeur par deux entiers consécutifs.