Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 2 [1] juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Soit les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - \text{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et } z_2 = 1 - \text{i}.$$

1. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2.$$

   a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

   b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O $\left(\text{c'est-à-dire tel que } \left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD).
La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure (prendre BC = 3 cm et BP = 1 cm et placer (BC) horizontale sur la feuille).
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Préciser l'image de la droite (BC) par r.

   b. Déterminer les images de R et P par r.

   c. Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?
3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR].

   Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   a. Préciser les images des points R et P par s.

   b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

   c. De ce qui précède, déduire que les points M, B, N et D sont alignés.

PROBLÈME **11 points**

Le problème a pour objet

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

- dans la partie A, d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : .

$$f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0,$$

- dans la partie B, de calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

A

Étude et représentation graphique de f

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 10 cm sur $x'x$ et 20 cm sur $y'y$).
On désigne par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f.

I. Étude d'une fonction auxiliaire
Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$

1. Montrer que la fonction u est strictement croissante.
   Donner son tableau de variations en précisant la limite en 0 et la valeur en 1.
2. En déduire que la fonction u s'annule pour un unique nombre réel β compris entre 0 et 1. Montrer que :

$$0,54 < \beta < 0,55.$$

II - Étude et représentation graphique de f

1. **a.** Étudier la limite de f en 0.
   b. Montrer que la fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe.
3. Donner le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ en precisant les tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 1.

B

La continuité de f assure l'existence de l'intégrale

$$J = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer une primitive de f.

I. - Étude d'une intégrale auxiliaire
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.
On désigne par g_n la fonction numérique définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g_n(t) = -t^n \ln t \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et } g_n(0) = 0.$$

1. Démontrer que g_n est continue sur $[0\,;\,1]$.
2. Soit G_n la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G_n(t) & = & -\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1}+\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ si } t>0\\ G_n(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

   a. Montrer que G_n est une primitive de g_n sur $[0\,;\,1]$.

   b. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$J_n=\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

II - Étude de J

1. Soit t un nombre réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   a. Calculer le produit

$$P_n(t)=(1+t)\left(1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n+1}t^{n-1}\right).$$

   b. En déduire que pour tout nombre réel $t\neq -1$,
   $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2+\ldots+\ldots+(-1)^{n+1}t^{n-1}+(-1)^n\dfrac{t^n}{1+t}$.

   c. Montrer que pour tout nombre réel $t\in[0\,;\,1]$,

$$f(t)=g_2(t)-g_3(t)+g_4(t)-\ldots+(-1)^{n-1}g_{n+1}(t)+(-1)^n\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$$

   puis que

$$J=J_2-J_3+J_4-\ldots+(-1)^{n-1}J_{n+1}+(-1)^n\int_0^1\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   d. En s'aidant une majoration de $\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que

$$0\leqslant\int_0^1\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}.$$

2. Soit $n\geqslant 1$ un entier naturel. On pose :

$$S_n=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+2)^2}.$$

   a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=J$.

   b. Montrer que $S_n\leqslant J\leqslant S_9$.

   c. En déduire une valeur approchée de J à $5\cdot10^{-3}$ près, exprimée avec trois décimales.