

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Métropole groupe 2¹ juin 1991 œ

EXERCICE 1

4 points

Soit les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i.$$

1. Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2.$$

- a. Résoudre cette équation dans \mathbb{R} .
- b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2

5 points

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O

(c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$).

Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD).

La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure (prendre $BC = 3$ cm et $BP = 1$ cm et placer (BC) horizontale sur la feuille).
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Préciser l'image de la droite (BC) par r .
 - b. Déterminer les images de R et P par r .
 - c. Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS?
3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR].

Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- a. Préciser les images des points R et P par s .
- b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B?
- c. De ce qui précède, déduire que les points M, B, N et D sont alignés.

PROBLÈME**11 points**

Le problème a pour objet

- dans la partie A, d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0,$$

- dans la partie B, de calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_0^1 f(t) dt.$$

A Étude et représentation graphique de f

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 10 cm sur $x'x$ et 20 cm sur $y'y$).

On désigne par \mathcal{C} la représentation graphique de f .

I. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit u la fonction définie sur $]0; 1]$ par :

$$u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$

1. Montrer que la fonction u est strictement croissante.
Donner son tableau de variations en précisant la limite en 0 et la valeur en 1.
2. En déduire que la fonction u s'annule pour un unique nombre réel β compris entre 0 et 1.
Montrer que :

$$0,54 < \beta < 0,55.$$

II - Étude et représentation graphique de f

1.
 - a. Étudier la limite de f en 0.
 - b. Montrer que la fonction f est continue sur $[0; 1]$.
2.
 - a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe.
3. Donner le tableau de variations de f .
4. Construire la courbe \mathcal{C} en précisant les tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 1.

B

La continuité de f assure l'existence de l'intégrale

$$J = \int_0^1 f(t) dt.$$

On ne cherchera pas à calculer une primitive de f .

I. - Étude d'une intégrale auxiliaire

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

On désigne par g_n la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par :

$$g_n(t) = -t^n \ln t \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et } g_n(0) = 0.$$

1. Démontrer que g_n est continue sur $[0; 1]$.
2. Soit G_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} G_n(t) &= -\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ si } t > 0 \\ G_n(0) &= 0. \end{cases}$$

- a. Montrer que G_n est une primitive de g_n sur $[0; 1]$.
- b. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^1 g_n(t) dt.$$

II - Étude de J

1. Soit t un nombre réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
 - a. Calculer le produit

$$P_n(t) = (1+t)(1-t+t^2+\dots+(-1)^{n+1}t^{n-1}).$$

- b. En déduire que pour tout nombre réel $t \neq -1$,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n+1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$
- c. Montrer que pour tout nombre réel $t \in [0; 1]$,

$$f(t) = g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) - \dots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) + (-1)^n \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$$

puis que

$$J = J_2 - J_3 + J_4 - \dots + (-1)^{n-1}J_{n+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt.$$

- d. En s'aidant une majoration de $\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt.$$

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On pose :

$$S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

- a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = J$.
- b. Montrer que $S_n \leq J \leq S_9$.
- c. En déduire une valeur approchée de J à $5 \cdot 10^{-3}$ près, exprimée avec trois décimales.