Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 3 [1] juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$. À tout point M du plan affixe z, $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1. On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des réels.
   - **a.** Exprimer en fonction de x et y la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z'.
   - **b.** Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe réel.
2. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. On écrit alors z sous la forme

$$z = 2\text{e}^{\text{i}t},\ t \in [0~;~2\pi].$$

   - **a.** Exprimer x' et y' en fonction de t.
   - **b.** En déduire que M' décrit une conique $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et les sommets.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit E le milieu du segment [CD]. On considère alors le carré DEFG de centre O′ tel que $\left(\overrightarrow{\text{DE}}, \overrightarrow{\text{DG}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure soignée avec AB = 6 cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   - **a.** Déterminer les éléments caractéristiques de s.
     Préciser l'image de E par s.
     En déduire l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AE}}, \overrightarrow{\text{BF}}\right)$.
   - **b.** On note Γ le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
     Placer Γ et I sur la figure.
     Montrer que I appartient à Γ.
   - **c.** Montrer que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales.
3. Soit Γ′ le cercle circonscrit au carré DEFG.
   Placer Γ′ sur la figure.
   Montrer que I appartient à Γ′.
4. Établir que les points C, G et I sont alignés.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

PROBLÈME **11 points**

A

1. Déterminer les solutions h sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (F)

$$y'' + 4y' + 4y = -4x.$$

   a. Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \longmapsto ax + b$ soit solution de (F).

   b. Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).

   c. En déduire toutes les solutions de (F).

   d. Donner la solution f de (F) qui vérifie

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -2.$$

B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 - x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

On se propose d'étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1. **a.** Calculer la fonction f' dérivée de f.
   Dresser le tableau de variations de f' sur $[0~;~+\infty[$.
   Indiquer la limite de f' en $+\infty$.
   En déduire le signe de f' sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$. Indiquer la limite de f en $+\infty$.

   c. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote d que l'on déterminera.
   Construire d et $\mathcal{C}$, sur un même graphique.

2. **a.** Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une solution et une seule. On note α cette solution.

   b. Justifier l'encadrement : $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de α.
On observe pour cela que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1.$$

1. Étudier les variations de g sur J. On ne demande pas de construire sa courbe représentative.
   En déduire que pour tout élément x de J, $g(x)$ appartient encore à J.

2. Montrer que pour tout x de J, on a :

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}.$$

En déduire que pour tout x de J, on a :

$$|g(x)-\alpha| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}|x-\alpha|.$$

3. Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g\left(u_n\right),$$

pour tout entier n, positif ou nul.

a. Montrer que pour tout entier n positif ou nul on a :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}\left|u_n-\alpha\right|.$$

b. En déduire que pour tout entier n, positif ou nul, on a :

$$|u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{3}{\mathrm{e}^2}\right)^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Déterminer un indice p pour lequel on est sûr d'avoir $\left|u_p-\alpha\right| \leqslant 10^{-3}$.
Calculer u_p à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimales).