Durée : 4 heures

∽ C Baccalauréat Métropole groupe 4 [1] juin 1991 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 2.

Soit φ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{3+\text{i}\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}.$$

1. Déterminer :

a. l'affixe de l'image $\varphi(\text{A})$ du point A,

b. l'affixe du point P tel que $\varphi(\text{P}) = 0$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ (on pourra utiliser les résultats de la question 1.)

3. Lorsque le point M est distinct du point A :

a. démontrer que le triangle AMM', où $M' = \varphi(M)$, est rectangle en M'.

b. Le point M et le milieu du segment [AM] étant donné, en déduire une construction au compas du point M'.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2\text{e}^{t} + \text{e}^{-t}\\ y &=& 2\text{e}^{t} - \text{e}^{-t}\end{array}\right. \quad \text{où le réel } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Soit $M(a~;~b)$ un point de $(\mathscr{C})$.

a. Donner, en fonction de a et b les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en M à $(\mathscr{C})$.

b. Soit N le point de coordonnées $(b~;~a)$ et T le point défini par :

$$\overrightarrow{\text{O}T} = \overrightarrow{\text{O}M} + \overrightarrow{\text{O}N}.$$

Montrer que la droite (MT) est la tangente en M à $(\mathscr{C})$.

2. a. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation : $x^2 - y^2 = 8$.

b. Tracer l'hyperbole (H) et préciser ses éléments caractéristiques suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.

1. Aix-Marseille, Montpellier, Nice – Corse, Toulouse

PROBLÈME **12 points**

I- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

1. **a.** Calculer les limites de f aux limites de l'ensemble de définition.
   b. Étudier le sens de variations de f (on ne demande pas de représentation graphique).
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique ℓ et que $\ell \in]1~;~2[$.
   b. Étudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

II.- On se propose, dans cette partie, de calculer une valeur approcheée de ℓ à 10^{-2} près.

1. Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1;2]$ par :

$$\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x.$$

   a. Étudier les variations de φ. Prouver que l'image par φ de l'intervalle $[1;2]$ est un intervalle contenu dans $[1;2]$.
   b. Montrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.
2. On considère alors la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 1 \\ U_{n+1} & = & \varphi\left(U_n\right) \text{ pour tout entier } n \end{array}\right.$$

   a. Démontrer que, pour tout entier n on a : $1 \leqslant U_n \leqslant 2$.
   b. Montrer que, pour tout réel x de $[1;2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier $n, U_{n+1} - \ell \leqslant |U_n - \ell|$.
   d. Montrer que la suite U converge vers ℓ.
   e. Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ. Donner un encadrement de U_n d'amplitude 10^{-2}.

III- La fonction g est définie sur $[0;1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \\ g(x) & = & -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x \text{ pour tout réel } x \text{ tel que } 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

1. Étudier la dérivabilité de g en 0.
2. Soit g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis vérifier que :

$$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout réel } x \text{ tel que } 0 < x \leqslant 1.$$

3. En déduire le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0;1]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction g.

IV- Dans cette partie l'objectif est le tracé de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction g, dans un plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$: unité graphique : 10 cm.

1. **a.** Montrer qu'une équation de la tangente (D) à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction g en son point d'abscisse 0 est $y = x$.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D).

   c. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (D).

   d. Soit α la fonction définie sur $\left[0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$ par :

$$\alpha(x) = g(x) - x.$$

   Étudier le sens de variations de la fonction α et en déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$ on a :

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 5 \cdot 10^{-5}.$$

   Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$ la courbe $(\mathscr{C})$ de la droite (D) ?

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\beta(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x.$$

   a. Montrer que la droite (D) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Γ).

   c. Tracer, sur un même graphique, la droite (D) et les courbes (Γ) et $(\mathscr{C})$.