Baccalauréat C groupe V Orléans–Tours [1]
juin 1990

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère l'hyperbole (H) d'équation :

$$y^2 - x^2 = 1.$$

   a. Déterminer ses sommets et ses asymptotes.

   b. Tracer cette hyperbole.

2. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2\cos^2\alpha - z\sin 2\alpha + 2 - \cos^2\alpha = 0. \qquad \text{(E)}$$

3. Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

   a. Démontrer que M appartient à l'hyperbole (H) définie au 1.

   b. Déterminer le sous-ensemble de (H) décrit par M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté.
Soient :

— s_{A} la similitude directe de centre A transformant B en C.

— s_{B} la similitude directe de centre B transformant C en A.

— s_{C} la similitude directe de centre C transformant A en B.

On se propose d'étudier $s = s_{\mathrm{C}} \circ s_{\mathrm{B}} \circ s_{\mathrm{A}}$.

1. **a.** Déterminer l'image de B par s.

   b. Démontrer que s est la symétrie centrale de centre B. (On pourra utiliser les transformations vectorielles associées à $s_{\mathrm{A}},~s_{\mathrm{B}}$ et s_{C}.)

2. Soit $\mathrm{C}' = s_{\mathrm{B}} \circ s_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ et $\mathrm{C}'' = s_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}')$.
   Quelle est la position relative des points B, C et C″ ?
   En déduire que A est le milieu du segment [CC′].
   Placer les points A, B, C, C′ et C″ sur une figure.

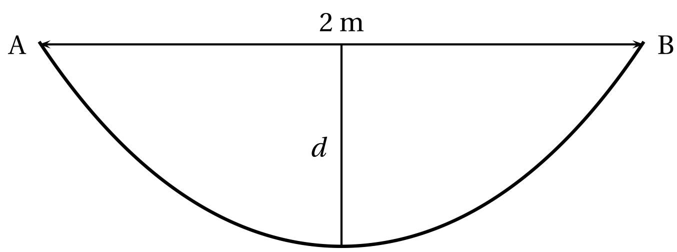
1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Rennes, Nantes

PROBLÈME **12 POINTS**

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (Déf. *Petit Larousse*). On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma ci-dessous.



À cet effet, pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

On note C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

A. Étude de la chaînette

Partie I.

1. Étudier la parité de f_λ : préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Tracer la courbe C_λ (unité graphique : 1 cm).
3. Prouver que pour tout À la courbe C_λ se déduit de C_1 par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Partie II. Calcul de la longueur de la chaînette

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[f_\lambda'\right]^2}\, dx.$$

(l'unité de longueur étant le mètre).

1. Vérifier que $1 + \left[f_\lambda'\right]^2 = \left[\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}\right]^2$.

2. En déduire que :

$$L(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \qquad (1)$$

Partie III Calcul de la flèche

Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette C_λ. (l'unité de longueur étant le mètre).

B. Étude de l'équation $L(\lambda) = 4$

Soit λ un nombre réel strictement positif.

Partie I

1. Résoudre l'équation d'inconnue X réelle $X2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

2. En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

3. Prouver enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$$\lambda = \ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right].$$

Partie II

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right).$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $u : x \longmapsto 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.
Calculer $g'(x)$.

2. En déduire le sens de variation de g.

Partie III

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x - g(x).$$

1. Calculer $h'(x)$. Étudier le signe de $h'(x)$.

2. Prouver que pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \ln x + \ln\left[2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right].$$

En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de h. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule dans $]0\,;\,+\infty[$.

4. Prouver que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

Partie IV

On note I = [2 ; $+\infty$[.

1. Démontrer que pour tout élément x de I, $g(x)$ appartient à I. (On pourra utiliser II. 2.)
2. Prouver que pour tout élément x de I :

$$0 < g'(x) \leqslant 0,5.$$

En déduire que pour tout élément x de I :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant 0,5|x - \alpha|.$$

Partie V

1. **a.** Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite d'éléments de I définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant (0,5)^n |u_0 - \alpha|.$$

b. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$.

c. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à la précision 10^{-3} et calculer u_{n_0}.

2. On se place dans la situation décrite au début du problème.
En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci, calculer une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.