Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 3 [1] juin 1993

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Donner sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$Z^6 - \text{i} = 0.$$

Représenter leurs images dans le plan complexe.
On les notera par argument croissant entre 0 et 2π :

$$\text{A}_0,\ \text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \text{A}_3,\ \text{A}_4,\ \text{A}_5.$$

2. **a.** Montrer que la droite (A_1A_5) coupe le segment $[\text{OA}_0]$ en son milieu.
b. Soit M_0 le point d'intersection des segments $[\text{A}_0\text{A}_2]$ et $[\text{A}_1\text{A}_5]$.
Reconnaître le point M_0 dans le triangle OA_0A_1.
On définit de même les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, dans les triangles OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6.
3. **a.** Soit m_k l'affixe de M_k pour $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$.
Déterminer géométriquement le module et l'argument de m_0 puis de m_k.
b. Quelle transformation géométrique simple du plan associe, pour tout entier $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$, le point M_k au point A_k ?
Qu'en déduit-on pour le polygone $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3\text{M}_4\text{M}_5$?

EXERCICE 1 **4 points**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement trois boules de l'urne, sans remise.
a. Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?
b. Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte un numéro pair ?
2. Une boîte comporte six compartiments numérotés de 1 à 6. On place les six boules, au hasard, une par compartiment.
Quelle est la probabilité pour que quatre boules au moins soient dans un compartiment ayant le même numéro que la boule ?
3. On effectue k tirages successifs d'une boule avec remise (k entier positif).
Les tirages sont supposés équiprobables.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

a. Calculer la probabilité de tirer au moins une fois la boule qui porte le numéro 6.

b. Pour quelles valeurs de k cette probabilité dépasse-t-elle 0,9 ?

PROBLÈME **4 points**

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est de 2 cm sur Ox et de 10 cm sur Oy.

Partie A

Dans cette partie on cherche à représenter f.

1. a. Calculer f' et vérifier que :

$$f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Résoudre sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$ l'inéquation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.

c. Dresser, sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$, le tableau de variations de f. Préciser les tangentes à C aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note C_1 et C_2 les représentations graphiques, dans le repère choisi, des deux fonctions :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Donner les abscisses sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$ des points où C rencontre C_1 et C_2.

b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents les courbes C et C_1 d'une part, C et C_2 d'autre part, ont même tangente.

c. Représenter sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$ les courbes C, C_1 et C_2.

3. On note Φ l'application qui au point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'~;~y')$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x + 2\pi\\ y' &=& \mathrm{e}^{-2\pi}y. \end{array}\right.$$

Soit C' l'image de C par Φ.

Montrer que $C' = C$.

Partie B

Dans cette partie on étudie une primitive de f

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (1)$$

En déduire la solution de (1) qui prend en zéro la valeur zéro et dont la dérivée prend en zéro la valeur un.

b. En observant que si g est une solution de (1) on a

$$g = -\frac{1}{2}\left(2g' + g''\right).$$

donner une primitive de g en fonction de g et g'.

En déduire une primitive de f puis l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t.$$

2. On pose $B_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ où k est un entier positif ou nul.

Soit $S_n = B_0 + B_1 + \ldots + B_n$. Exprimer S_n à l'aide de la fonction F.

En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on précisera.

3. **a.** Donner, sans calculer l'intégrale, le signe de B_k suivant la parité de l'entier k.

b. Calculer B_0 puis B_k pour k entier positif.

Vérifier que $B_k = (-1)^k \mathrm{e}^{-kx} B_0$.

c. Calculer $T_n = |B| + |B_1| + \ldots + |B_n|$.

Montrer que T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini.

Préciser cette limite.

d. On pose $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $T = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Vérifier que l'on a la relation :

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$$