∽ Série mathématiques et mathématiques et technique ∾
Baccalauréat Métropole juin 1958

I

1[er] sujet. - Équation d'une ellipse rapportée à ses axes de symétrie.

2[e] sujet. - Dérivée de la fonction $\sin x$.

3[e] sujet. - Figure inverse d'un cercle dans l'espace, le pôle d'inversion n'étant pas dans le plan du cercle. (On suppose connus les résultats concernant les transformés par inversion des plans et des sphères.)

II

On considère l'équation

$$(1) \qquad \cos 5x + a\cos 3x + b\cos x = 0,$$

où l'inconnue x désigne la mesure en radians d'un angle ; a et b sont des nombres donnés.

Partie A

1. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $x = \dfrac{\pi}{2}$ [1] soit solution de l'équation (1) ?
2. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $x = \dfrac{\pi}{3}$ soit solution de l'équation (1) ?
3. Trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles, à la fois $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{3}$ sont solutions de l'équation proposée [2].
   Résoudre alors complètement, dans ce cas l'équation (1).

Partie B

Dans le cas où les coefficients a et b ont des valeurs quelconques, on demande de former l'équation algébrique qui admet pour racines les valeurs de

$$u = \cos x,$$

lorsque x est solution de l'équation (1).
Soit (2) l'équation ainsi obtenue ; on la mettra sous la forme

$$u\varphi(u) = 0,$$

où $\varphi(u)$ est un polynôme du quatrième degré.

Partie C

1. Il est probable que l'auteur du sujet a voulu dire $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6}$ (Note de l'éditeur.)
2. Voir la note précédente.

1. Montrer qu'un nouveau changement d'inconnue, défini par

$$u^2 = v$$

transforme l'équation $\varphi(u) = 0$ en une équation du second degré, soit

$$f(v) = 0.$$

2. À quelles conditions doivent satisfaire a et b pour que l'équation $f(v) = 0$ possède deux racines, distinctes ou non, qui soient, toutes les deux, positives ou nulles, et inférieures à 1 ?

Combien trouve-t-on alors, sur le cercle trigonométrique, d'extrémités distinctes d'arcs dont la mesure x vérifie l'équation (1) ?

Partie D

Dans cette dernière question, on suppose que les conditions trouvées dans la question C 2. sont réalisées.
Pour les interpréter, on suppose que a et b sont les coordonnées d'un point M dans un plan auxiliaire rapporté à deux axes rectangulaires, Oa et Ob.

1. Montrer que le point M ne peut pas être à l'intérieur de la parabole (P) qui admet la droite d'équation $b = 0$ comme directrice et le point de coordonnées $a = -1,\ b = 2$ comme foyer.

2. Montrer que la région où doit se trouver le point M est limitée par la parabole (P) et deux de ses tangentes, que l'on précisera.

3. Calculer l'aire de cette région.