Baccalauréat Série mathématiques
Métropole juin 1959

I

1er SUJET

Définition d'un nombre premier .
Démontrer que tout nombre entier peut être décomposéen un produit de facteurs premiers et que cette décomposition est unique (les conséquences de ce théorème ne sont pas demandées).
Application : Décomposer le nombre 15 015 en produit de nombres premiers.

2e SUJET

Calculer (en degrés ou en grades, au choix du candidat), avec la précision permise par les tables de logarithmes, les angles x, compris entre 0 et 2π, qui satisfont à l'équation

$$2,7\cos x + 3,9\sin x = 1,4.$$

3e SUJET

Produit de deux homothéties.

II

Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, on définit les points fixes A, B, I, J, S et le point variable M par leurs coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(-3\,;\,0),\quad \mathrm{B}(3\,;\,0),\quad \mathrm{I}(1\,;\,0),\quad \mathrm{J}(9\,;\,0),\quad \mathrm{S}(0\,;\,h),\quad \mathrm{M}(z\,;\,0),$$

où h désigne une constante positive et x une variable pouvant prendre toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$.

1. Calculer en fonction de x la quantité $z = \mathrm{MA} + 2\mathrm{MB}$ (MA et MB représentent des longueurs, donc des nombres positifs ou nuls).
   Montrer que, dans chacun des intervalles $x < -3$, $-3 < x < 3$, $x > 3$, la quantité z s'exprime en fonction linéaire de x et vérifier que, selon l'intervalle considéré, le rapport $\dfrac{z}{\mathrm{MI}}$ ou le rapport $\dfrac{z}{\mathrm{MJ}}$ reste constant.
2. Calculer la quantité $y = \dfrac{\mathrm{MA} + 2\mathrm{MB}}{\mathrm{MS}}$ en fonction de x et h.
   Dans le cas particulier $h = 3$, étudier les variations de y en fonction de x et tracer le graphique représentatif avec le plus de précision possible. On prendra pour échelle : sur l'axe $x'\mathrm{O}x$, 1 unité = 1 centimètre ; sur l'axe $y'\mathrm{O}y$, 1 unité = 3 centimètres.
   Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.
   Pour quelles valeurs de x a-t-on $y = 3$?
   Supposant toujours $h = 3$, comparer les valeurs prises par y en deux points M_1, M_2 divisant harmoniquement le segment AB.
   Expliquer géométriquement le résultat obtenu, d'après le choix particulier du point S.
3. Revenant au cas général ($h > 0$ quelconque), on désigne par A', B', I', J', M' les inverses respectifs de A, B, I, J, M dans l'inversion de centre S et de puissance h^2.
   Montrer que, quand x varie en restant dans l'un des intervalles $x < -3$, $-3 < x < 3$, $x > 3$, le rapport $\dfrac{y}{\mathrm{M'I'}}$ ou le rapport $\dfrac{y}{\mathrm{M'J'}}$ selon l'intervalle considéré, reste constant.

Montrer qu'on peut ainsi déterminer sans calcul le sens de variation de y et retrouver les résultats obtenus au **2.** pour $h = 3$.

Étant donnés un cercle C, deux points, A′, B′, de ce cercle et un point M′ variable sur ce cercle, montrer que l'étude précédente permet de déterminer la plus grande et la plus petite valeur de $\text{M}'\text{A}' + 2\,\text{M}'\text{B}'$.