∽ Baccalauréat Métropole [1] juin 1961 ∾
Série mathématiques

EXERCICE 1

Cinq nombres entiers positifs, $a,\ b,\ c,\ d,\ e$, dans cet ordre, forment une progression géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec a. Déterminer ces cinq nombres de façon que

$$6a^2 = e - b.$$

EXERCICE 2

1. u désignant la mesure en radians d'un angle et v étant égal à $\dfrac{\pi}{4} - u$, montrer que les expressions $\sin u + \cos u$ et $\sin u \cos u$ peuvent s'exprimer en fonction de $\cos v = x$.
En déduire l'expression de

$$\frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2} \sin u \cos u}$$

en fonction de x.

2. Étudier la variation de

$$y = \frac{2x}{2x^2 - 1}$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et construire la courbe représentative (C) rapportée à un système d'axes rectangulaires $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$.
On précisera en particulier la tangente à l'origine. On prendra la même unité de longueur sur les deux axes, égale à 2 cm.

3. Une parallèle à $x'\mathrm{O}x$, d'ordonnée variable$m$, coupe la courbe (C) en général en deux points M et M$'$, et la droite $y'\mathrm{O}y$ en un point H.
Évaluer la puissance de H par rapport au cercle de diamètre MM$'$.
Montrer que ce cercle découpe sur $y'\mathrm{O}y$ un segment de longueur constante quand m varie.
Calculer en fonction de x les abscisses X_1 du centre I de ce cercle et X_2 du pôle J de la droite $y'\mathrm{O}y$ par rapport à ce cercle.
Évaluer ensuite m en fonction de X_1 d'une part et en fonction de X_2 d'autre part.
Construire sur le graphique précédent les lieux des points I et J quand m varie.

4. On se propose d'utiliser la courbe (C) pour résoudre l'équation en u

$$(1) \qquad \sin u + \cos u = m\sqrt{2} \sin u \cos u$$

et l'on se borne aux solutions de cette équation dont la mesure en radians est comprise entre 0 et 2π.

1. Alger, Israël

Discuter, en fonction du paramètre m, le nombre de racines de cette équation. On achèvera les calculs pour les valeurs particulières de m intervenant dans la discussion.

5. Peut-on choisir m pour que l'équation (1) admette quatre solutions, comprises entre 0 et 2π, formant une progression arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{2}$?