

🌀 Baccalauréat Série mathématiques Métropole juin 1961 🌀

EXERCICE 1

Cinq nombres entiers positifs, a, b, c, d, e , dans cet ordre, forment une progression géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec a . Déterminer ces cinq nombres de façon que

$$6a^2 = e - b.$$

EXERCICE 2

- u désignant la mesure en radians d'un angle et v étant égal à $\frac{\pi}{4} - u$, montrer que les expressions $\sin u + \cos u$ et $\sin u \cos u$ peuvent s'exprimer en fonction de $\cos v = x$.
En déduire l'expression de

$$\frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2} \sin u \cos u}$$

en fonction de x .

- Étudier la variation de

$$y = \frac{2x}{2x^2 - 1}$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et construire la courbe représentative (C) rapportée à un système d'axes rectangulaires $x'Ox, y'Oy$.

On précisera en particulier la tangente à l'origine. On prendra la même unité de longueur sur les deux axes, égale à 2 cm.

- Une parallèle à $x'Ox$, d'ordonnée variable m , coupe la courbe (C) en général en deux points M et M', et la droite $y'Oy$ en un point H.
Évaluer la puissance de H par rapport au cercle de diamètre MM'.
Montrer que ce cercle découpe sur $y'Oy$ un segment de longueur constante quand m varie.
Calculer en fonction de x les abscisses X_1 du centre I de ce cercle et X_2 du pôle J de la droite $y'Oy$ par rapport à ce cercle.
Évaluer ensuite m en fonction de X_1 d'une part et en fonction de X_2 d'autre part.
Construire sur le graphique précédent les lieux des points I et J quand m varie.

- On se propose d'utiliser la courbe (C) pour résoudre l'équation en u

$$(1) \quad \sin u + \cos u = m\sqrt{2} \sin u \cos u$$

et l'on se borne aux solutions de cette équation dont la mesure en radians est comprise entre 0 et 2π .

Discuter, en fonction du paramètre m , le nombre de racines de cette équation. On achèvera les calculs pour les valeurs particulières de m intervenant dans la discussion.

- Peut-on choisir m pour que l'équation (1) admette quatre solutions, comprises entre 0 et 2π , formant une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$?