

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Métropole octobre 1962

EXERCICE 1

On considère le nombre

$$E = n^4 + n^2 + 1,$$

n étant un entier positif et non nul.

1. Décomposer E en produit de deux facteurs du second degré et démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.
2. Le nombre E peut-il être premier?

PROBLÈME

Soient deux cercles (C) et (C') , de centres O et O' , de rayons respectifs $2R$ et $R\sqrt{3}$, et tels que $OO' = 3R$.

Un mobile, M , décrit le cercle (C) d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $+1$; il part, à l'instant initial, du point A situé entre O et O' , sur la droite OO' .

Un deuxième mobile, M' , décrit le cercle (C') d'un mouvement uniforme de même vitesse angulaire et part, en même temps que le mobile M , du point A' tel que

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A}\right) = +\frac{\pi}{6}.$$

1. On prend deux axes de coordonnées rectangulaires, $x'Ox$ et $y'Oy$; l'axe $x'Ox$ contient le point O' , le sens positif étant celui de O vers O' .

Calculer les coordonnées des mobiles M et M' à l'instant de date t et en déduire la quantité $z = MM'^2$.

Contrôler géométriquement le résultat dans les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad M \text{ et } M' \text{ sont en } A \text{ et } A'; \\ t = \frac{\pi}{3}, & \quad M \text{ et } M' \text{ sont en } B \text{ et } B'. \end{aligned}$$

Variation et représentation graphique de z lorsque les deux mobiles font leur premier tour; pour le graphique, on pourra prendre $R = 1$ centimètre.

Trouver, lorsque $R = 1$ cm, l'aire S comprise entre la droite $y = 7$ et la partie du graphique obtenu située au-dessus de cette droite.

2.
 - a. M et M' étant les positions des deux mobiles à l'instant de date t , démontrer que la position M' est la transformée de la position M dans une similitude.
 - b. Montrer que le point F , centre de cette similitude, est le point d'intersection des supports des vecteurs \overrightarrow{OB} et $\overrightarrow{O'B'}$, B et B' étant les positions respectives de M et M' à la date $t = \frac{\pi}{3}$.
 - c. Déterminer le rapport et l'angle de similitude.
 - d. Soit K le milieu de MM' . Démontrer que K est le transformé de M' dans une similitude de centre F . En déduire le lieu de K .
 - e. Démontrer que l'enveloppe de la droite MM' est une hyperbole, que l'on déterminera. Quelle est son excentricité?