Baccalauréat mathématiques élémentaires
Métropole juin 1962
Sujet de secours

EXERCICE

1. Calculer, en fonction de b et c, les valeurs de $\cos a$ pour lesquelles l'expression

$$A = 1 - \left(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c\right) + 2\cos a \cos b \cos c$$

s'annule.

2. Utiliser le résultat précédent pour mettre $\dfrac{A}{4}$ sous la forme d'un produit de quatre sinus.

PROBLÈME

Géométrie plane

On considère deux axes de coordonnées rectangulaires, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, munis d'une même unité de longueur.
Soient C le point de $x'\text{O}x$ d'abscisse OC = $2a$ (a positif donné), A le milieu de OC et (C) le cercle de centre C et de rayon a.
M étant un point quelconque de (C), on pose

$$\left(\overrightarrow{\text{C}x},\ \overrightarrow{\text{CM}}\right) = \theta \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{OM}}\right) = \alpha.$$

1. Calculer les coordonnées, x et y, de M en fonction de a et de θ.
Calculer tg α en fonction de θ.
Écrire l'équation qui détermine θ lorsque α a une valeur donnée.
Résoudre et discuter cette équation.
Contrôler sur la figure le résultat de la discussion.
2. La droite OM recoupe (C) en N. On considère le cercle (U) du plan $x\text{O}y$ passant par M et N et orthogonal à (C).
Construire son centre, U.
Déterminer avec précision le lieu géométrique de U lorsque le point M décrit le cercle (C).
On appelle P et Q les points où la polaire de O par rapport à (C) coupe le cercle (U).
Montrer que P et Q divisent harmoniquement un segment fixe, IJ, de cette polaire.
3. Démontrer que le cercle (V) circonscrit au triangle OMC et le cercle (W) circonscrit au triangle ONC sont égaux.
4. On effectue l'inversion de pôle A et de puissance a^2. Préciser les transformés, dans cette inversion, des cercles (C), (U), (V) et (W).
En déduire que le cercle (U) coupe les cercles (V) et (W) sous le même angle .

N. B. - Par « lieu géométrique » il faut entendre « ensemble de points ».