Baccalauréat mathématiques élémentaires
Métropole septembre 1963

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}, \quad x, y \quad \text{réels.}$$

Tracer la courbe représentative ; le repère est orthonormé et l'unité graphique est 3 cm. Quelle est la nature de cette courbe ?

EXERCICE 2

1. t étant un paramètre réel, exprimer la quantité

$$\delta = \sin^2 t - 2(1 - \cos t)$$

en fonction de $\sin \frac{t}{2}$. Quels sont les nombres, appartenant au corps des réels ou au corps des complexes, dont le carré est égal à δ ?

2. Discuter et résoudre l'équation

$$(1) \qquad 2u^2(1 - \cos t) - 2u \sin t + 1 = 0,$$

où u est l'inconnue, réelle ou complexe. Préciser, suivant la valeur de $\sin \frac{t}{2}$, le module et l'argument de chaque solution de (1).

3. Dans toute la suite du problème, on suppose que t appartient à l'intervalle $0 < t < 2\pi$; on appelle u' celle des solutions de (1) dont l'argument est $\frac{t}{2}$.
Calculer $z = u'^2$, carré de cette solution : on donnera sa forme normale $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y réels), son module, r, son argument, θ ; établir la relation $r = x + \frac{1}{2}$.

4. Le paramètre t représente le temps et l'on considère le mouvement d'un mobile dont la position à l'instant de date t est le point $m(x\,;\,y)$, image du nombre complexe z précédent dans un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
Déterminer la trajectoire (T) du mouvement ; indiquer les dates de passage aux points de (T) qui ont pour abscisse $\dfrac{1}{2}$; former l'équation cartésienne de (T).

5. On associe les positions m et m_1 relatives aux instants de dates

$$t \quad (0 < t < \pi) \quad \text{et} \quad t_1 \quad (t_1 = t + \pi)$$

Soient M et M_1 leurs inverses dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. Évaluer les mesures algébriques
$\overline{\mathrm{O}M}$ sur l'axe d'angle polaire t ;
$\overline{\mathrm{O}M_1}$ sur l'axe d'angle polaire $t + \pi$.
Calculer la distance MM_1 ; trouver, quand t varie, la trajectoire du milieu I, de MM_1 et la nature de son mouvement.