

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Métropole septembre 1964

EXERCICE 1

En utilisant la théorie des congruences, trouver la forme générale des nombres entiers positifs n tels que l'entier $n^2 + n + 1$ soit multiple de 13.

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté au repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$, on donne un cercle (Γ) , dont le centre est O et le rayon R .

Un point M du cercle est repéré par l'angle de demi-droites

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy} \right) = \varphi, \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Une direction de droite D est repérée par l'angle de droites

$$(x'Ox, D) = \alpha, \quad \text{modulo } \pi, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

On mène par M la parallèle à D , qui coupe l'axe $x'Ox$ en A , ainsi que la perpendiculaire à D , qui coupe l'axe $y'Oy$ en B .

1. Calculer l'abscisse de A , l'ordonnée de B , la distance AB et les coordonnées du point N , symétrique de M par rapport au milieu, I , de AB .
2. On suppose α fixe, φ seul variable.
 - a. Déterminer l'ensemble des points N et l'enveloppe de la droite MN .
 - b. Soit C le point de AB défini par $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -2$; déterminer l'ensemble des points C ; dessiner cet ensemble pour $R = 3$ cm et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
3. On suppose α et φ variables ensemble.
 - a. Quelle relation nécessaire et suffisante, liant α et φ , exprime que A reste fixe?
On notera $\overline{OA} = kR$, k étant un nombre réel donné.
Déterminer alors l'enveloppe de la droite MB ; dessiner cette enveloppe, seulement pour $R = 3$ cm et $k = -2$.
 - b. Dédire de ce qui précède une résolution géométrique du système d'équations trigonométriques

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \varphi) = k \sin \alpha, \\ \cos(\alpha - \varphi) = k' \cos \alpha, \end{cases}$$

où α et φ sont deux inconnues, $0 < \alpha < \pi$, et k et k' deux nombres relatifs donnés; discuter.

N. B. - Pour chacune des recherches proposées, le candidat pourra, à son gré, emprunter ses méthodes à la géométrie pure ou à la géométrie analytique.