Baccalauréat série mathématiques
Métropole juin 1962
SESSION RÉSERVÉE AUX RAPATRIÉS D'ALGÉRIE

EXERCICE

On considère le nombre

$$E = n^4 + n^2 + 1,\ n \text{ étant un enLier positif et non nul.}$$

1. Décomposer E en produit de deux facteurs du second degré et démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.
2. Le nombre E peut-il être premier ?

PROBLÈME

Soient deux cercles (C) et (C′), de centres O et O′, de rayons respectifs $2R$ et $R\sqrt{3}$, et tels que $\text{OO}' = 3R$.
Un mobile, M, décrit le cercle (C) d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire +1 ; il part, à l'instant initial, du point A situé entre O et O′, sur la droite OO′.
Un deuxième mobile, M′, décrit le cercle (C′) d'un mouvement uniforme de même vitesse angulaire et part, en même temps que le mobile M, du point A′ tel que
$\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{O}'\text{A}'}\right) = +\dfrac{\pi}{6}$.

1. On prend deux axes de coordonnées rectangulaires, $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; l'axe $x'\text{O}x$ contient le point O′, le sens positif étant celui de O vers O′.

   Calculer les coordonnées des mobiles M et M′ à l'instant de date t et en déduire la quantité $z = \overline{\text{MM}'}^2$.

   Contrôler géométriquement le résultat dans les cas particuliers suivants :

   $$\begin{array}{ll} t = 0, & \text{M et M}' \text{ sont en A et A}' ; \\ t = \dfrac{\pi}{3}, & \text{M et M}' \text{ sont en B et B}'. \end{array}$$

   Variation et représentation graphique de z lorsque les deux mobiles font leur premier tour ; pour le graphique, on pourra prendre $R = 1$ centimètre.

   Trouver, lorsque $R = 1$ cm, l'aire S comprise entre la droite $y = 7$ et la partie du graphique obtenu située au-dessus de cette droite.
2. M et M′ étant les positions des deux mobiles à l'instant de date t, démontrer que la position M′ est la transformée de la position M dans une similitude.

   Montrer que le point F, centre de cette similitude, est le point d'intersection des supports des vecteurs $\overrightarrow{\text{OB}}$ et $\overrightarrow{\text{O'B'}}$, B et B′ étant les positions respectives de M et M′ à la date $t = \dfrac{\pi}{3}$.

   Déterminer le rapport et l'angle de similitude.

   Soit K le milieu de MM′. Démontrer que K est le transformé de M′ dans une similitude de centre F.

   En déduire le lieu de K.

   Démontrer que l'enveloppe de la droite MM′ est une hyperbole, que l'on déterminera. Quelle est son excentricité ?