# Baccalauréat C Métropole[1] février 1960 (session de remplacement)

**I.** - 1er sujet

Différence des puissances d'un point par rapport à deux sphères.
Application : Lieu des points dont la différence des puissances par rapport à deux sphères est constante.

**I.** - 2e sujet

Cercles orthogonaux. Définition.
Donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que deux cercles soient orthogonaux (l'une des deux devant faire intervenir une puissance).
Application : Propriétés des cercles orthogonaux à deux cercles donnés.

**I.** - 3e sujet

Dérivée du quotient de deux fonctions admettant des dérivées.
*Application* : Calculer la dérivée de

$$y = \frac{x^3+1}{x^2-x}.$$

**II.**

1. On donne un triangle OAB fixe quelconque.
   **a.** Montrer qu'à tout point P du plan de ce triangle on peut associer un couple de nombres $(x\,;\,y)$ et un seul satisfaisant à

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

   **b.** On désigne par $\lambda$ un nombre quelconque et l'on considère le point $P$ de la droite AB défini par $\overrightarrow{\mathrm{B}P} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.
   Mettre $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ sous la forme

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$

   $x$ et $y$ étant exprimés au moyen de $\lambda$.
   Comment faut-il choisir $\lambda$ pour que $P$ soit entre A et B ?
   Quelle relation faut-il imposer aux nombres $\lambda$ et $\lambda'$ pour que les points $P$ et $P'$ correspondants soient conjugués harmoniques par rapport à A et B ?

   **c.** Quel est le lieu du point $P$ défini par

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

   quand $\lambda$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ ?

1. et Israël, Montréal, Tunisie

**d.** On suppose qu'il existe deux axes perpendiculaires $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, tels que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ soit porté par $x'\mathrm{O}x$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ par $y'\mathrm{O}y$ et l'on pose $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OB}} = b$.

Exprimer, dans ce cas, en ,fonction de $a$, $b$, $\lambda$, les coordonnées du point $P$ défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

Retrouver ainsi, dans ce cas particulier, le lieu demandé à la question précédente, grâce à son équation.

**2.** Revenant au cas général et $\lambda$ désignant toujours un nombre quelconque, on définit un point $M$ de la droite OA et un point $N$ de la droite OB par les relations

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}N} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OB}};$$

on désigne par $\mathrm{D}_\lambda$ la droite MN. Les éléments relatifs à un autre nombre $\lambda'$ seront désignés par $M'$, $N'$et $\mathrm{D}_{\lambda'}$.

**a.** Existe-t-il des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $\mathrm{D}_\lambda$ soit confondue avec un des côtés du triangle ?

Deux droites $\mathrm{D}_\lambda$ et $\mathrm{D}_{\lambda'}$ peuvent-elles être parallèles ?

Quelle relation (R) doivent vérifier $\lambda$ et $\lambda'$ pour que la division (OA$MM'$) soit harmonique ?

Montrer par le calcul que la division (OB$NN'$) est alors harmonique.

Montrer que les points $P$ et $P'$ définis par

$$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{\mathrm{O}N} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{O}P'} = \overrightarrow{\mathrm{O}M'} + \overrightarrow{\mathrm{O}N'}$$

sont sur la droite AB.

Lorsque $\lambda$ et $\lambda'$ vérifient la relation (R), que peut-on dire de la division (ABPP$'$) ? Retrouver ainsi la propriété relative aux divisions (OA$MM'$) et (OB$NN'$).

**b.** On suppose que fL est un nombre quelconque et

l'on désigne par Q le point de $\mathrm{D}_\lambda$ défini par $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NM}$.

Mettre $\overrightarrow{\mathrm{O}Q}$ sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{O}Q} = u\overrightarrow{\mathrm{OA}} + v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $u$ et $v$ étant exprimés en fonction de $\lambda$ et $\lambda'$.

À quelle condition doivent satisfaire $\lambda$ et $\mu$ pour que $Q$ soit sur la droite AB ?

$u$ étant donné, peut-on déterminer $\lambda$ et $\mu$ de manière que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}Q} = u\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}?$$

Discuter. Montrer que le calcul précédent permet de déterminer les droites $\mathrm{D}_\lambda$ passant par un point donné S de la droite AB. Discuter le nombre de solutions selon la position de S par rapport à A et B.

**c.** $Q$ désignant toujours le point de $\mathrm{D}_\lambda$ défini par $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NM}$, on demande le lieu du point $Q$ quand, $\mu$ étant fixe, $\lambda$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Déterminer le lieu du point de rencontre des droites $\mathrm{D}_\lambda$ et $\mathrm{D}_\mu$ quand $\lambda$ et $\mu$ sont liés par la relation $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 2$ et que $\lambda$ prend toutes les valeurs compatibles avec cette relation.