Baccalauréat Mathématiques Métropole septembre 1955

I.
1^er^ sujet

Puissance d'un point par rapport à un cercle.
Axe radical de deux cercles.

I.
2^e^ sujet

Étudier la figure inverse d'un cercle par rapport à un pôle d'inversion situé dans son plan.
Comment se transforment le centre du cercle, la région du plan intérieure au cercle, dans les différents cas de figure ?

I.
3^e^ sujet

1. Donner les définitions :
   a. de l'homothétie ;
   b. de l'inversion.
2. Étant donnés dans un plan deux cercles extérieurs l'un à l'autre, rechercher les points de ce plan susceptibles d'être :
   a. centres des homothéties transformant l'un de ces cercles en l'autre ;
   b. centre des inversions transformant l'un de ces cercles en l'autre.

   On admettra sans les démontrer les théorèmes donnant les éléments de la figure transformée d'un cercle par l'une des deux transformations ci-dessus.

II.

On donne le système d'équations trigonométriques

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l c l}\cos x \cdot \cos y &=& a+b\\ \sin x \cdot \sin y &=& b-a,\end{array}\right.$$

où a et b sont deux nombres algébriques donnés [que l'on considérera au cours des discussions comme les coordonnées d'un point M d'un plan auxiliaire (P) par rapport à deux axes rectangulaires de ce plan].
Lorsque a et b sont convenablement choisis, il existe deux angles, α et β, compris entre 0 et π, dont les cosinus sont respectivement $2a$ et $2b$. On considérera encore α et β, lorsqu'ils existent, comme les coordonnées d'un point m d'un second plan auxiliaire (p), par rapport à deux axes rectangulaires de ce plan.

1. Dans quelle région de (P) M doit-il se trouver pour que α et β existent ?

   Exprimer dans ce cas au moyen de α et β toutes les solutions du système (1).
2. On suppose, pour toute la suite du problème, que x et y sont deux angles d'un même triangle (T) et qu'en outre x est supérieur ou égal à y.

   Montrer qu'il existe au plus une solution du système (1) qui satisfasse à ces conditions supplémentaires et donner l'expression de cette solution lorsqu'elle existe. Dans quelle région du plan (p) le point m se trouve-t-il alors ?

   Dans quelle région de (P) M doit-il se trouver pour que la solution existe ?

3. Où doit se trouver m pour que (T) soit équilatéral ?

Quel est le lieu des points m qui correspondent à un triangle (T) isocèle :

a. avec $x = y$;

b. avec $x = z$;

c. avec $y = z$ [z désignant le troisième angle de (T)] ?

Dans quelle région (r) du plan (p) m doit-il se trouver pour que z soit supérieur à x (donc aussi à y) ?

4. En se servant des résultats qui viennent d'être obtenus, répondre aux mêmes questions en ce qui concerne la position de M dans le plan (P). On trouvera pour les cas **b.** et **c.** deux arcs d'une même courbe ; on mettra ces arcs soigneusement en place sur la figure tracée dans le plan (P).

Calculer l'aire de la région (R) cherchée pour M dans la dernière question.