Baccalauréat Mathématiques Métropole septembre 1956

I. – 1er sujet

Après avoir rappelé la définition des nombres premiers, montrer que tout nombre entier non premier peut être décomposé en un produit de facteurs premiers et que cette décomposition est unique.

I. – 2e sujet

Définition des fractions. Qu'entend-on par fraction irréductible ?
Recherche de toutes les fractions égales à une fraction donnée.

I. – 3e sujet

Recherche des multiples communs à deux nombres.
Plus petit commun multiple. (On supposera connues les propriétés du plus grand commun diviseur ; on n'utilisera pas la décomposition en facteurs premiers.)

II.

Dans un plan orienté, on considère un axe fixe $x'\text{O}x$ et, sur cet axe, le point A, d'abscisse R positive donnée. Soit (O) le cercle de centre O, de rayon R.

A. - On considère un axe X′OX et deux points M et N de (O) symétriques par rapport à cet axe. On appelle θ l'une quelconque des déterminations de l'angle orienté de demi-droites $\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{OX}}\right)$ et φ l'une quelconque des déterminations de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OX}},\ \overrightarrow{\text{ON}}\right)$; l'une des déterminations de $\left(\overrightarrow{\text{OX}},\ \overrightarrow{\text{OM}}\right)$ est alors $-\varphi$.

1. Calculer, en fonction de θ et de φ, les longueurs arithmétiques des côtés du triangle AMN.
Montrer que, si la condition
$$(1) \qquad 2\text{MN} = \text{AM} + \text{AN}$$
est satisfaite, θ et de φ sont nécessairement liés soit par la relation
$$(2') \quad 4\cos\varphi - \cos\theta = 3,$$
soit, par la relation
$$(2'') \qquad 4\cos\varphi - \cos\theta = -3.$$
2. Montrer que l'une ou l'autre des relations (2′) et (2″) entraîne la relation (1).
Il conviendra d'abord d'établir que :
$$|\sin u| = 2|\sin v| \text{ entraîne } \sin(u+v)\cdot\sin(u-v) \geqslant 0,$$
et que
$$|cos u| = 2|\cos v| \text{ entraîne } \sin(u+v)\sin(u-v) < 0.$$
3. Soient C le point de $x'\text{O}x$ d'abscisse $\overline{\text{OC}} = \dfrac{\text{R}}{4}$, H sa projection sur MN, (C) le cercle de centre C qui passe par A.
En utilisant ce qui précède, montrer que, pour que la condition (1) soit satisfaite, il faut et il suffit que la condition
$$(3) \qquad \text{CH} = \frac{\text{R}}{4}$$
le soit, c'est-à-dire que MN soit tangente au cercle (C).

B. - On appellera (T) le triangle variable AMN, inscrit dans (O), de sommet A fixe, satisfaisant constamment à la condition (1).

1. Montrer que la droite AH qui joint le point A à la projection H de C sur MN est bissectrice intérieure en A du triangle (T).

   Trouver, lorsque (T) varie, le lieu du centre I de son cercle inscrit et celui du centre I′ de son cercle exinscrit dans l'angle A (on pourra commencer par évaluer les rapports $\dfrac{\text{IA}}{\text{IH}}$ et $\dfrac{\text{I'A}}{\text{I'H}}$).
2. Montrer qu'il existe en général, pour chaque position de (T), une hyperbole passant par M et N, admettant pour foyer A et pour directrice associée la droite CH

   Trouver, lorsque (T) varie, le lieu de chacun des sommets de cette hyperbole et le lieu de son centre. Montrer que chacune de ses asymptotes passe par un point fixe.

N. B. - On pourra traiter le partie B indépendamment de la partie A, à condition d'admettre le résultat énoncé au 3. de A.