Baccalauréat Métropole septembre 1959
Série mathématiques

I

1^er^ sujet

Déterminer la dérivée de $y = \sqrt{u}$, où u est une fonction donnée de la variable x ; on aura soin de préciser les hypothèses qui rendent le calcul valable.
Application : Calculer la dérivée de

$$y = \sqrt{\sin 2x + 2\cos 3x}.$$

2^e^ sujet

Somme des termes d'une progression géométrique ; limite, si elle existe, de cette somme, quand le nombre des termes augmente indéfiniment.
Application : Trouver la fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ qui engendre le développement décimal périodique

$$3{,}212\,121\ldots$$

3^e^ sujet

Étudier, en fonction de t, le mouvement rectiligne défini par l'équation horaire

$$x = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \sin\frac{\pi}{4}t.$$

II

Dans un plan rapporté à deux axes perpendiculaires, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on donne le rectangle fixe ABCD par les coordonnées de ses sommets :

$$\text{A}(a\,;\,b),\quad \text{B}(-a\,;\,b),\quad \text{C}(-a\,;\,-b),\quad \text{D}(a\,;\,-b).$$

On pose $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$, avec $0 < \alpha < \dfrac{\Pi}{2}$, et $r > 0$.
À tout point M du plan on associe ses projections orthogonales P sur AB, Q sur CD, R sur AD, S sur BC.
On désigne par U le point d'intersection des droites PR et QS, par V le point d'intersection des droites PS et QR.

1. Calculer, en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M les produits $\overline{\text{MP}}\cdot\overline{\text{MQ}}$ et $\overline{\text{MR}}\cdot\overline{\text{MS}}$.

   Trouver le lieu des points M du plan tels que les quatre points P, Q, R, S soient sur un même cercle.

   Trouver le lieu des points M du plan tels que les quatre points P, Q, R, S forment un quadrangle orthocentrique, c'est-à-dire que chacun d'entre eux soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

   Construire le rectangle et les deux lieux précédents sur la même figure.
2. Montrer que, quel que soit le point M du plan, le point U est sur la droite BD.

   On pourra, soit démontrer au préalable que les milieux des segments PS, QR, MU sont alignés, soit calculer les coordonnées $(X\,;\,Y)$ de U en fonction de $(x\,;\,y)$.

   Montrer, de même, que le point V est sur la droite AC.
3. Dans cette question, le point M décrit le cercle (Γ) circonscrit au rectangle ABCD. On étudie quelques propriétés du triangle MUV.

a. Montrer que les côtés MU et MV sont respectivement perpendiculaires à BD et AC.

b. Montrer que le côté UV garde une longueur constante.

c. Montrer que chacun des points P, Q, R, S est centre d'un cercle inscrit ou exinscrit à ce triangle.

d. Désignant par $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$ les coordonnées de M, calculer les coordonnées de U et V.

Retrouver le fait que la longueur UV reste constante.

Calculer les coordonnées du milieu I du segment UV.

Trouver le lieu de I quand M décrit (Γ).